

代 号 10701

学 号 1014121683

分类号 TN209

密 级 公开

西安电子科技大学

硕士学位论文



题 (中、英文) 目 光学压缩编码超分辨率成像方法研究

Encoded Optical Compressive Imaging

Method for Super-resolution

作 者 姓 名 钟成 指导教师姓名、职务 邵晓鹏 教授

学 科 门 类 工学 学科、专业 光学工程

提交论文日期 二〇一三年三月

西安电子科技大学 学位论文创新性声明

秉承学校严谨的学风和优良的科学道德，本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果；也不包含为获得西安电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切的法律责任。

本人签名：钟家

日期 2013.3.4

西安电子科技大学 关于论文使用授权的说明

本人完全了解西安电子科技大学有关保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属西安电子科技大学。本人保证毕业后离校后，发表论文或使用论文工作成果时署名单位仍然为西安电子科技大学。学校有权保留送交论文的复印件，允许查阅和借阅论文；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以允许采用影印、缩印、或其它复制手段保存论文。同时本人保证，毕业后结合学位论文研究课题再撰写的文章一律署名单位为西安电子科技大学。

本人签名：钟家

日期 2013.3.4

导师签名：刀

日期 2013.3.4

摘要

压缩感知理论与光学成像的结合促成了光学压缩编码超分辨率成像的产生。这使得通过对场景很少的观测而重构出高分辨率的图像成为可能。然而,这一领域仍然存在很多尚未解决的问题。本文在经典压缩编码孔径成像方法的基础上,优化了压缩编码模板的设计过程,大大降低了大模板生成算法的空间复杂度和计算复杂度;采用全变分正则化项,减少了重建图像的伪影,提高了重建图像的质量;较全面地分析了压缩编码成像方式在 $4-f$ 系统上的应用;提出了压缩编码孔径 $4-f$ 成像系统的改进方法,并提出了多次曝光的压缩编码成像方法。

本文较全面地论述了光学压缩编码成像方法在空域、频域和时域三方面的应用,并实现了空间、时间复杂度更低、效果更好的重建算法。

关键词: 压缩成像 超分辨率 压缩感知 $4-f$ 成像系统 多次曝光

Abstract

The field of encoded optical compressive imaging emerges due to the combination of compressed sensing theory and optical imaging, which makes it possible to sample fewer points and reconstruct high resolution images. However, a lot of problems remain unsolved in this field. Based on classical compressive coded aperture imaging method, the design of coded aperture is optimized to make the procedure faster and occupy less memory. Besides, a regular term of total variation is appended to the original optimization, which reduces the artifacts and makes the image quality better. Moreover, the application of encoded compressive imaging in 4- f imaging architecture is generally analyzed and an improvement was proposed. Finally, the multi-shot encoded compressive imaging method is also proposed.

To sum up, the encoded optical compressive imaging method is widely discussed in this paper, including its application on space domain, frequency domain and time domain, and a better reconstruction algorithm for this field is selected which requires less time and memory but produces better images.

**Keyword: compressive imaging super-resolution compressed sensing
4- f imaging architecture multi-shot**

目录

摘要.....	I
ABSTRACT	III
第一章 绪论.....	1
1.1 课题的背景与意义.....	1
1.2 相关研究情况.....	2
1.3 论文内容安排.....	3
第二章 数学理论基础.....	5
2.1 一维时域信号压缩感知理论.....	5
2.1.1 时域信号采样.....	5
2.1.2 信号的稀疏表示.....	5
2.1.3 采样时噪声的处理.....	7
2.2 压缩感知理论对二维空域信号的扩展.....	8
2.2.1 卷积模型与矩阵模型的转换.....	9
2.2.2 BCCB 矩阵的性质	9
2.3 压缩感知复原算法.....	11
2.3.1 ISTA 复原算法	12
2.3.2 FISTA 复原算法	14
2.4 本章小结.....	14
第三章 经典光学压缩编码成像.....	17
3.1 单像素相机与高光谱压缩编码孔径成像介绍.....	17
3.1.1 单像素相机.....	17
3.1.2 高光谱压缩编码孔径成像.....	18
3.2 压缩编码孔径成像系统.....	20
3.2.1 编码孔径成像.....	20
3.2.2 压缩编码孔径成像.....	21
3.2.3 稀疏重建的梯度投影算法(GPSR)	23
3.3 压缩编码孔径成像重建方法改进.....	28
3.3.1 全变分(Total Variation, TV)(半)范数.....	28
3.3.2 基于全变分的图像去噪方法.....	29
3.3.3 基于全变分的重建方法.....	32
3.4 仿真实验与分析.....	34
3.4.1 重建效果比较.....	34

3.4.2 时间复杂度比较.....	37
3.4.3 多值模板与二值模板的比较.....	39
3.5 本章小结.....	40
第四章 压缩编码成像的扩展	41
4.1 傅里叶光学基础.....	41
4.1.1 透镜的相位调制作用.....	41
4.1.2 透镜的傅立叶变换性质.....	42
4.2 压缩编码成像的频域扩展.....	46
4.2.1 4- f 系统压缩振幅调制方法.....	46
4.2.2 4- f 系统相位压缩调制方法.....	47
4.2.3 仿真实验与分析.....	48
4.3 压缩编码成像的时域扩展.....	49
4.3.1 改进的压缩编码 4- f 系统实现.....	49
4.3.2 多次曝光的压缩编码成像.....	50
4.3.3 仿真实验与分析.....	52
4.4 本章小结.....	52
第五章 总结与展望	53
致 谢.....	55
参考文献.....	57
研究成果.....	63

第一章 绪论

1.1 课题的背景与意义

在一些光学成像的应用, 考虑到系统的成本、体积等因素, 人们希望用小尺寸的感光器件进行成像。例如, 在弱光成像中, 敏感测量器是十分昂贵的, 使用小尺寸的感光器件可以大大降低成本^[1]。在另外一些应用中, 如遥感, 尽管已经使用高分辨率的感光器件, 但探测器的分辨率仍不能满足实际需求。事实上, 人类对于分辨率的追求是无止境的, 因此, 超分辨率成像技术就显得尤为重要^[2]。

图像的超分辨率主要有两类: 一类是通过传统成像设备对场景采样, 之后利用插值、重建、机器学习等方法对传统图像进行图像超分辨率, 属于图像处理范畴; 而第二类属于计算成像的范畴, 即对传统成像设备进行一定的改造, 以提高采样设备的像元利用率, 并对所获得的图像进行重建。

超分辨率方法的“超”字体现在信息的增加。因此, 从严格的意义上来说, 第一类超分辨率方法中的插值、重建方法并不属于超分辨率的范畴^[3]。第一类超分辨率方法中, 基于机器学习的超分辨率方法所利用的额外信息来自外界其它图像^[4]; 而第二类超分辨率方法所利用的额外信息来自场景本身。

第二类超分辨率方法的核心, 是在感光器件(如 CCD、COMS 等)上记录更多的信息, 它属于计算成像的范畴, 它旨在在成像采样的过程中压缩信息, 并通过计算机来重建。与第一类超分辨率方法相比, 其优势在于它超分辨率时所利用的额外信息是真实的, 而基于机器学习方法的第一类超分辨率方法所利用的额外信息是近似的, 并不精确。其不足在于物理实现复杂, 难于实现, 尚在理论研究阶段。另一方面, 两类超分辨率方法可以结合, 即可以首先进行第二类超分辨率, 再进行第一类超分辨率。本文讨论的是第二类超分辨率的方法。

图像的分辨率是由光学成像系统的空间采样频率决定的。奈奎斯特采样定理证明, 对于图像采样而言, 空间采样间隔尺寸应不大于图像中感兴趣最小细节尺寸的一半^[2]。显然, 感光器件中探测单元的密度越大, 采集得到的高频信息就越多。然而, 近年由 D. Donoho、E. Candés 及华裔科学家 T. Tao 等人提出的压缩感知(Compressed Sensing, CS)理论^{[5][6][7]}认为, 奈奎斯特采样定理只是采样不失真的充分条件, 而非必要条件。只要感兴趣的信号是稀疏的或可压缩的, 则在一定条件下, 采样少量数据而恢复出高频信息是可能的。

压缩感知理论的出现使得压缩成像成为可能, 虽然距离真正的应用还有很长

的一段距离,但从理论推导中,可以预见压缩成像方法的发展一定可以大大提高感光器件中像元的利用率,节约存储和传输的成本。

1.2 相关研究情况

在压缩成像方面,最先取得成果的是 Rice 大学。在极限情况下,即使感光探测器仅有单个像素,也可以对物体成像。Rice 大学根据 CS 理论设计了这种单像素照相机^[8]。其原理为使用数控的微透镜阵列来表示二值伪随机阵列,场景先投影到此阵列上,而后由光学器件将能量集中,并由一个单像素探测器接收。由于微镜阵列上的每个单元的方向都可以被快速改变,因此可以在很短的时间内测量一系列伪随机投影值。则原始图像可通过 CS 重建算法进行重构。该结构将 CS 原理成功地应用到成像系统中,其优点是任意二值投影矩阵都能被轻易地用在该系统上,因此现有的 CS 理论能被直接应用到该测量结构上,但是该方式限制了动态变化图像的时间分辨率。同时,这种方法要求快速连续采集多幅图像,故其实时性差,不利于视频成像。

Roummel F. Marcia 和 Rebecca M. Willett^{[9][10]}提出的一种基于 CS 理论的编码孔径成像结构解决了单像素相机的实时性问题。他们设计了一种伪随机编码的孔径模板,并从数学上证明了这种观测能很好地符合 CS 理论所要求的 RIP(Restricted Isometry Property)性质,从而准确重构出图像数据。该方法将在文中详细描述。由于该结构能够快速成像且不需要结构复杂、体积较大的成像装置,使其在实际压缩成像应用方面非常适用,同时该成像框架易扩展到视频成像系统中。

文献^{[9][10]}所使用的压缩编码成像方法所成的像的确能够将场景的高频信息很好地保留下来,但是在重建后引入了比较多的类似于噪声的伪影^[7](artifacts),如何消除这种伪影从而达到更好的重建效果是一个值得关心的问题。

另外,Brady 等人在 2006 年首次提出了压缩光谱成像的概念,这种成像方法得到的观测值总数小于数据立方体的元素总数^[11]。为了实现压缩光谱成像,他们的团队提出了一类新的成像仪,即编码孔径快照光谱成像仪(Coded Aperture Snapshot Spectral Imager, CASSI)。除杜克大学 Brady 等人的研究团队在从事这方面的研究以外,还有美国德拉华州的 Arce 教授的科研团队^[12]也在从事这一领域的研究工作。其研究侧重点多集中在压缩编码孔径模板的改良上,其次他们对传统编码模板生成方法也进行了改良,使系统的整体性能得到提升。

本文基于光学压缩编码孔径超分辨率成像方法,做了如下工作:首先利用矩阵理论的有关知识,优化了压缩编码模板的设计,大大降低了大模板生成算法的空间复杂度和计算复杂度,使得复原算法可以更好地应用到大分辨率的图像复原中;其次,将全变分正则化项加入重建优化式中,在一定程度上提高了重建图像

的质量,减少了伪影的数量;再次,从振幅编码和相位编码两个方面较全面地分析了光学压缩编码成像方式在 $4-f$ 系统上的应用;最后,提出了压缩编码孔径 $4-f$ 成像系统的改进方法,并提出了多次曝光的压缩编码成像方法。

总体而言,本文从空域、频域和时域三方面较全面地论述了光学压缩编码成像方法,并实现了空间、时间复杂度更低、效果更好的重建算法。

1.3 论文内容安排

除第一章介绍课题背景及相关研究情况外,本文其余的章节内容安排如下:

第二章简单介绍了与本课题相关的数学基础,主要包括采样理论、压缩感知理论及相关的矩阵理论。确立了本课题的采样理论基础及物理模型基础。

第三章主要阐述压缩编码孔径成像方法及其它两种光学压缩成像方法。并介绍了信号复原算法,包括梯度投影算法与加入全变分正则化项后的重建算法。并利用实验比较了二者的效果与时间复杂度。

第四章讨论了压缩编码成像在频域的扩展。这一部分主要描述压缩编码成像的 $4-f$ 架构,并且给出了实现 $4-f$ 系统调制的两种可行方案即振幅调制方法与相位调制方法。

第五章讨论了压缩编码成像的时域扩展。这一部分提出了一种改进的压缩编码 $4-f$ 系统实现,并在此基础上,提出了多次曝光的压缩编码成像。

第六章对本文的工作进行总结,并探讨今后可以深入研究的方向。

第二章 数学理论基础

2.1 一维时域信号压缩感知理论

在数字时代,对连续信号采样而使其离散化的问题是一个十分基础却又非常关键的科学问题。在 20 世纪 50 年代,经典的奈奎斯特-香农(Nyquist-Shannon)采样定理的提出,为采样理论奠定了数学基础。另一方面,为了节约存储和传输成本,对连续信号采样后,一般会将采样获得的数据压缩,例如经典的图像压缩算法 JPEG(Joint Photographic Experts Group)能将数据压缩到原始数据的 10%。也就是说,对于有结构的图像信息来说,90%的信息都是需要抛弃的。既然采样的信息包含如此高的冗余数据,为什么不直接采样更少的数据,或者说,将压缩模块与采样模块合并似乎更为经济、合理。为了解决这个问题,压缩感知(Compressed Sensing)或压缩采样(Compressive Sampling)在 2006 年被 David Donoho, Emmanuel Candès, Justin Romberg 和 Terence Tao(陶哲轩)等人提出^{[5][6][7]},为压缩采样提供了数学理论基础。在此之后,压缩感知理论被广泛应用到各个领域,而光学压缩编码孔径,也是基于这一理论背景而发展的光学成像新领域。

2.1.1 时域信号采样

奈奎斯特采样定理:若对频率带宽不超过 f_{\max} (单位为 Hz)的连续时域信号 $x(t)$ 采样,采样周期为 T_s ,则当采样频率 $f_s = 1/T_s$ 不低于 $2f_{\max}$ 时,原信号 $x(t)$ 可由采样序列 $x[k] = x(kT_s)$ 重建而不丢失信息。奈奎斯特-香农采样定理被认为是采样的充分必要条件,它适用于任何采样问题。然而随着信号带宽的提高,基于奈奎斯特采样定理的采样率也随之提高,这对硬件也提出了更高的要求。

压缩感知理论较好地解决了这一问题。它指出:只要信号是稀疏的或者是可压缩的,那么就可以利用一个具有 RIP 性质的测量矩阵将高位信号投影至低维空间,实际对此低维空间的信号采样,就能使得实际采样率远低于奈奎斯特采样率。最后通过求解一个优化问题即可从这些少量的投影数据中以高概率重构出原始信号。

2.1.2 信号的稀疏表示

压缩感知理论的一个重要前提是信号是稀疏的或是可压缩的。对于一维离散

信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 如果 $\|\mathbf{x}\|_0 \ll n$, 则称信号 \mathbf{x} 是稀疏的。其中, $\|\mathbf{x}\|_0$ 表示 \mathbf{x} 的非 0 元素的个数。有意义的信号一般而言都不稀疏, 但是如果将此信号变换到其它空间后, 可以获得稀疏的信号, 则称此信号是可压缩的。下面给出可压缩的正式定义。

空间 \mathbb{R}^n 中的任意信号 \mathbf{x} 都可以通过 n 个 $n \times 1$ 维的正交基向量 $\{\boldsymbol{\psi}_i\}_{i=1}^n$ 线性表示。令正交矩阵 $\boldsymbol{\Psi} \triangleq [\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_n]$, 则信号 \mathbf{x} 可表示为:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \theta_i \boldsymbol{\psi}_i \quad \text{或} \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\theta} \quad (2-1)$$

其中系数向量 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 为信号 \mathbf{x} 变换到 $\boldsymbol{\Psi}$ 域后的系数。由矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$ 的正交特性可知, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{x}$ 。因此除了选择的正交基不同, \mathbf{x} 与 $\boldsymbol{\theta}$ 应看成同一信号的不同表示。若 $\boldsymbol{\theta}$ 稀疏, 则称信号 \mathbf{x} 是可压缩的。

对可压缩信号的采样问题是 CS 理论的核心部分之一。在感知向量(或测试向量) $\{\boldsymbol{\phi}_i^T, i=1, 2, \dots, m\}$ 的作用下, 长度为 n 的信号 \mathbf{x} 被投影到 m 维空间并被采样, 即: $y_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{x}, i=1, 2, \dots, m$ 。为了提高采样效率, 人们希望能够通过少量采样数据重建出原信号, 也就是说, $m \ll n$ 。这使得传统采样方式——先大量采样数据, 再大量抛弃数据——转变为: 在探测端仅测量少量数据(这使得存储和传输成本大大降低), 之后每一比特的数据都得以在基站或具有足够计算能力的计算机上重建, 从而获得原始信号。采样或感知的过程可用矩阵形式描述为:

$$\mathbf{y} = \hat{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \mathbf{x} \quad (2-2)$$

其中,

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1^T \\ \boldsymbol{\phi}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}_m^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$\hat{\boldsymbol{\Phi}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 可以看成从正交矩阵 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 中随意抽取 m 行。在设计感知矩阵时, 应考虑两个问题: 一是采样数量 m 的范围问题; 二是感知矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的性质问题。

定理 1^[13]:

对于给定信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 并假设 \mathbf{x} 在基 $\boldsymbol{\Psi}$ 下是 r -稀疏的, 并从 $\boldsymbol{\Phi}$ 域随机采样 m 次。对于某个正的常量 C , 若

$$m \geq C \cdot \mu^2(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}) \cdot r \cdot \log n \quad (2-3)$$

则通过求解一个 l_1 最小问题, 信号 \mathbf{x} 可以被极高概率地精确重建:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\boldsymbol{\theta}\|_1 \\ \text{subject to:} \quad & \hat{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{y} \end{aligned} \quad (2-4)$$

□

理解(2-3)式至关重要, 它几乎包含了 CS 框架下的所有参数: 信号长度 n 、 $\boldsymbol{\Psi}$

域下的稀疏度 r 、足以恢复信号 \mathbf{x} 的测量量 m ，还有矩阵 Φ 和矩阵 Ψ 的不相关度 $\mu(\Phi, \Psi)$ 。 $\mu(\Phi, \Psi)$ 的定义如下，

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq k, j \leq n} |\phi_k^T \psi_j| \quad (2-5)$$

其中， ϕ_k 和 ψ_j 分别是 Φ 的第 k 列和 Ψ 的第 j 列。很明显， μ 测量了 Φ 基和 Ψ 基的所有原子中最相关的原子相关度。利用 Cauchy-Schwarz 不等式，我们可以得到 $\mu(\Phi, \Psi) \leq \sqrt{n}$ 。另一方面， $\mu(\Phi, \Psi) \geq 1$ 必须成立，否则 $|\phi_k^T \psi_j| < 1/\sqrt{n}$ 蕴含了 $\|\phi_k\|^2 = \sum_{j=1}^n |\phi_k^T \psi_j|^2 < 1$ ，这与 ϕ_k 是单位向量矛盾。因此，相关测度 μ 的范围为 $[1, \sqrt{n}]$ 。

当 $\mu(\Phi, \Psi) \approx 1$ 时， Φ 与 Ψ 不相关。这样，(2-3)式可以近似地表达为

$$m \geq C \cdot r \cdot \log n \quad (2-6)$$

另外，根据实际经验，4 倍法则也是一个简单而不错的选择^[14]，而且它与信号长度 n 无关：

$$m \geq 4r \quad (2-7)$$

可以看出， Φ 与 Ψ 的不相关性是 CS 理论的关键。假设 Φ 与 Ψ 相关，也就是说 $\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n}$ ，则(2-3)式变为：

$$m \geq C \cdot n \cdot r \cdot \log n$$

很明显，在这种情形下，压缩采样无法进行。

2.1.3 采样时噪声的处理

压缩感知理论的重要特性之一是它对小扰动有较好的抑制作用。这里的小扰动主要指两方面：一是指并非“真正稀疏”而只是“近似稀疏”的数据，或者说该数据有很多接近于 0 的值，但等于 0 的值很少；二是指在采样过程中引入的噪声。考虑这两种扰动，CS 的采样模型可以写为：

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (2-8)$$

其中 \mathbf{w} 表示噪声， \mathbf{A} 表示维数为 $m \times n$ 的感知矩阵：

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\Phi\Psi = \hat{\Phi}\Psi \quad (2-9)$$

在式(2-9)中， \mathbf{S} 是一个 $m \times n$ 的矩阵，其作用是从矩阵 Φ 中挑出 m 行。令 $\hat{\Phi} = \mathbf{S}\Phi$ ，为了标准化，式(2-8)中的 \mathbf{x} 实际表示的是无噪声模型式(2-1)中的 θ 。

通过解 SOCP(Second-Order Cone Program)凸最优化问题，信号 \mathbf{x} 可以由含噪测量 \mathbf{y} 重建：

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\mathbf{x}\|_1 \\ \text{subject to:} \quad & \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (2-10)$$

其中， ε 是数据中噪声量的上界。为了方便，我们重新将无噪的 ℓ_1 最优化问题描述

如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\mathbf{x}\|_1 \\ \text{subject to: } & \mathbf{Ax} = \mathbf{y} \end{aligned} \quad (2-11)$$

CS 理论的鲁棒性主要依赖于 RIP 性质^[15],其定义如下:

对于任意整数 $r=1,2,\dots$, 定义矩阵 \mathbf{A} 的等距常数 δ_r 为, 对于所有的 r -稀疏的向量 \mathbf{x} 来说使得下式成立的最小的数:

$$(1-\delta_r)\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{Ax}\|_2^2 \leq (1+\delta_r)\|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (2-12)$$

如果 δ_r 小于 1, 但又不十分接近于 1, 则称矩阵 \mathbf{A} 符合 r 阶 RIP 性质。

定理 2^[16]:

对于无噪的情况, 假设 $\delta_{2r} < \sqrt{2}-1$, 那么(2-11)的解 \mathbf{x}^* 服从

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|_2 \leq C_0 \cdot \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_r\|_1 / \sqrt{r} \quad (2-13)$$

并且

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\| \leq C_0 \cdot \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_r\|_1 \quad (2-14)$$

其中, C_0 为一常数, \mathbf{x}_r 是将 \mathbf{x} 向量中除最大的 r 个分量之外, 将其余的值全部设为 0 后的向量。可以看出, 如果 \mathbf{x} 向量是 r -稀疏的, 那么 $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}$, 这就蕴含了 $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$ 。也就是说, 此时的重建是完美的。但更重要的是, 定理 2 也描述了非稀疏信号。特别地, 如果 \mathbf{x} 不稀疏但近似 r -稀疏, $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_r\|_1$ 很小, 那么定理 2 说明, \mathbf{x}^* 是 \mathbf{x} 的一个很好的估计。

定理 3:

对于(2-8)所示的有噪声的测量值, 假定 $\delta_{2r} < \sqrt{2}-1$ 。则式(2-10)的解 \mathbf{x}^* 服从

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\| \leq C_0 \cdot \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_r\|_1 / \sqrt{r} + C_1 \varepsilon \quad (2-15)$$

C_0 和 C_1 为某个常数。同样, 如果 \mathbf{x} 是 r -稀疏的, 则 $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}$, 那么由式(2-15)可知, $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\| \leq C_1 \varepsilon$ 。或者说, 稀疏信号的重建精度只由噪声量决定。当信号 \mathbf{x} 只是近似 r -稀疏时, 定理 3 说明, \mathbf{x}^* 的精度由信号 \mathbf{x} 与 \mathbf{x}_r 的接近程度和噪声强度共同决定。

2.2 压缩感知理论对二维空域信号的扩展

光学成像系统是对空间光强信息的采样系统, 在一定的情形下, 该系统可以近似地认为是线性空间不变的系统, 由傅里叶光学^[17]可知, 这样的系统可以由卷积模型来表示。将光学成像系统与压缩感知理论联系起来需要解决两方面的问题。第一, 卷积模型如何与矩阵模型进行转换; 第二, 二维信号如何与一维信号进行转换。

2.2.1 卷积模型与矩阵模型的转换

如果一个成像是线性空间不变的，那么，其物理模型可以写成：

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} * \mathbf{PSF} + \mathbf{W} \quad (2-16)$$

其中，矩阵 \mathbf{X} 表示真实场景， \mathbf{PSF} (Point Spread Function) 为点扩展函数，符号 $*$ 表示卷积操作，矩阵 \mathbf{Y} 为观测图像，矩阵 \mathbf{W} 为高斯噪声。令

$$\mathbf{y} = \text{vec}(\mathbf{Y}), \mathbf{x} = \text{vec}(\mathbf{X}), \mathbf{w} = \text{vec}(\mathbf{W}) \quad (2-17)$$

其中， $\text{vec}(\cdot)$ 算子表示对矩阵的向量化或拉直的操作。为了使式(2-16)与压缩感知理论相联系，我们期望将其更改为矩阵形式，即：

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (2-18)$$

为了简单，这里先不考虑噪声，将边界条件认为是循环边界条件，并先考虑 \mathbf{X} 与 \mathbf{Y} 只有 9 个元素，则有：

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \\ y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \\ y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} & a_{32} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{12} & a_{32} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{21} & a_{11} & a_{31} \\ a_{31} & a_{21} & a_{11} \\ a_{11} & a_{31} & a_{21} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{23} & a_{13} & a_{33} \\ a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} & a_{23} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{23} & a_{13} & a_{33} \\ a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} & a_{23} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} & a_{32} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{12} & a_{32} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{21} & a_{11} & a_{31} \\ a_{31} & a_{21} & a_{11} \\ a_{11} & a_{31} & a_{21} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{21} & a_{11} & a_{31} \\ a_{31} & a_{21} & a_{11} \\ a_{11} & a_{31} & a_{21} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{23} & a_{13} & a_{33} \\ a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} & a_{23} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} & a_{32} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{12} & a_{32} & a_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

可以看到， \mathbf{A} 为一个 BCCB(Block circulant with circulant Block, BCCB)矩阵。另外，若为零边界条件，则 \mathbf{A} 为 BTTB(Block Toeplitz with Toeplitz Blocks)矩阵；若为反射边界条件，则 \mathbf{A} 为 BTTB+BTHB(Block Toeplitz with Hankel Blocks)+BHTB(Block Hankel with Toeplitz Blocks)+BHKB(Block Hankel with Hankel Blocks)矩阵。

由于 BCCB 矩阵具有非常好的计算性质，因此在这里我们采用循环边界条件。

2.2.2 BCCB 矩阵的性质

BCCB 矩阵有很好的计算性质。对于真实图像 \mathbf{X} ，为表示方便，设其长宽像素数一致，均为 n ，即 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，则 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n^2 \times 1}$ ，在不考虑降采样因素的影响下，矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ 。假设将矩阵 \mathbf{A} 显式地存储在计算机内存中，其代价是巨大的。但如果矩阵 \mathbf{A} 是 BCCB 矩阵，那么我们不需要存储整个矩阵，而只需存储其一行元素或一列元素即可。

BCCB 的具体形式如下:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n & \mathbf{A}_{n-1} & \cdots & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_n & \cdots & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{A}_{n-2} & \cdots & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2} \quad (2-20)$$

其中, $\{\mathbf{R}_i\}, i=1,2,\dots,u$ 为块循环矩阵:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_n & \cdots & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2-21)$$

不难证明, BCCB 矩阵是正规矩阵, 也就是说 $\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^*$ 。因此, 可以对 \mathbf{A} 酉对角化,

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^* \mathbf{\Lambda} \mathbf{F} \quad (2-22)$$

其中, $\mathbf{\Lambda}$ 是对角矩阵, 其对角元素为矩阵 \mathbf{A} 的特征值; \mathbf{F} 是二维的离散傅立叶变换 (Discrete Fourier Transform, DFT) 矩阵。这种矩阵有两个很好的性质: 一是可以快速地找到矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{PSF} 之间的关联, 二是对于 $\mathbf{A}\mathbf{x}$ 这种矩阵-向量乘法, 可以把它转换成快速傅里叶算法而不需要显式地把 \mathbf{F} 或 \mathbf{A} 构建出来。

先不考虑噪声, 将式(2-22)代入 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 中可以得到:

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}^* \mathbf{\Lambda} \mathbf{F} \mathbf{x} \quad (2-23)$$

由 $\mathbf{A} = \mathbf{F}^* \mathbf{\Lambda} \mathbf{F}$ 可知 $\mathbf{F} \mathbf{A} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{F}$, 若只考虑 \mathbf{A} 与 \mathbf{F} 的第一列, 则有 $\mathbf{F} \mathbf{a}_1 = \mathbf{\Lambda} \mathbf{f}_1$ 。其中 \mathbf{a}_1 为矩阵 \mathbf{A} 的第一列, \mathbf{f}_1 为矩阵 \mathbf{F} 的第一列。由于矩阵 \mathbf{F} 的第一列的所有元素都为 $1/\sqrt{N}$, 因此有如下结论:

$$\mathbf{F} \mathbf{a}_1 = \mathbf{\Lambda} \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \boldsymbol{\lambda} \quad (2-24)$$

其中, $\boldsymbol{\lambda}$ 为 $\mathbf{\Lambda}$ 的对角元素组成的列向量, 也即 BCCB 矩阵的特征值向量。可以得到, $\boldsymbol{\lambda} = \sqrt{N} \mathbf{F} \mathbf{a}_1$ 。另外, 二维傅里叶变换矩阵 \mathbf{F} 具有如下性质:

$$\begin{aligned} \sqrt{N} \mathbf{F} \mathbf{x} &= \text{vec}(\mathfrak{Z}(\mathbf{X})) \\ \mathbf{F}^{-1} \mathbf{x} &= \sqrt{N} \text{vec}(\mathfrak{Z}^{-1}(\mathbf{X})) \end{aligned} \quad (2-25)$$

其中, $\mathfrak{Z}(\cdot)$ 算子表示二维傅里叶变换, 故

$$\mathbf{\Lambda} = \mathfrak{Z}(\mathbf{PSF}') \quad (2-26)$$

利用 MATLAB 中的函数来表示^[18],

$$\begin{aligned} \mathbf{PSF}' &= \text{reshape}(\mathbf{a}_1, n, n) = \text{circshift}(\mathbf{PSF}, \text{center}) \\ \mathfrak{Z}(\mathbf{PSF}') &= \text{psf2otf}(\mathbf{PSF}) \end{aligned} \quad (2-27)$$

其中, $center$ 为 PSF 的中心点坐标。因此, a_1 为 PSF 值的重组。故, 若 PSF 的值符合随机分布, 则 a_1 的值必然符合随机分布; 若边界条件为周期边界条件, 则矩阵 A 一定为 BCCB 矩阵。因此, 我们实际无需设计矩阵 A , 而只需将 PSF 设计为随机矩阵即可。

另一方面, 对于 Ax 这种矩阵-向量乘法, 可将其拆解成 F^*AFx 。如果从右到左结合, 就可以很快算出 Ax 的解。 Fx 可通过二维快速傅里叶变换来求解, 由式 (2-25) 可知, A 可通过对 a_1 的二维快速傅里叶变换而获得。 F^*x 可通过二维快速逆傅里叶变换方法而获得。

通过以上分析可知, 快速计算 $y = Ax$ 的计算式为:

$$Y = \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(PSF') \circ \mathfrak{F}(X)) \quad (2-28)$$

其中, $\mathfrak{F}^{-1}(\cdot)$ 算子表示二维傅里叶逆变换。符号 \circ 表示按元素相乘。若利用 MATLAB 中的语法形式来表示, 可写为:

$$Y = \text{real}(\text{ifft2}(\text{fft2}(X) .* \text{psf2otf}(PSF))) \quad (2-29)$$

类似地, 若要计算 $A^{-1}y$, 则

$$X = \text{real}(\text{ifft2}(\text{fft2}(Y) ./ \text{psf2otf}(PSF))) \quad (2-30)$$

2.3 压缩感知复原算法

在本节中, 将介绍一些常用的压缩感知复原算法来解决式(2-10)所描述的问题。为了清晰, 式(2-10)被再次写出:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|x\|_1 \\ \text{subject to:} \quad & \|Ax - y\|_2 \leq \varepsilon \end{aligned}$$

这是一个含噪采样的压缩感知问题, 也是工程问题的一般形式。通过 Lagrange 乘子, 上式可被写为:

$$\min \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \quad (2-31)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $y \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, 参数 λ 为权衡因子。 λ 一般随 ε 的增大而增大。下面讨论式(2-31)的解法。

这是一个凸优化问题, 可以通过内点法^[19]、同伦算法^[20]、梯度投影法^[21]、匹配追踪法^[22]和迭代阈值法^[23]等方法来求解。比较而言, 内点法速度较慢但非常精确, 而同伦算法对小尺度问题比较适用, 梯度投影法具有较快的运算速度, 匹配追踪法对于维数较低的小尺度信号重构问题运算速度较快, 但对于存在噪声的大尺度重构问题, 重构结果不够精确, 鲁棒性较差。迭代阈值算法只能保证局部收敛到最优解, 并且这些解有可能是非稀疏的。

2.3.1 ISTA 复原算法

ISTA(Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm)方法是解决式(2-31)的经典方法。之后有很多基于 ISTA 而产生的方法，因此，目前，ISTA 已经不仅指一种方法，而是指一族方法，称为 ISTAs^{[24][25][26][27]}。

不失一般性，将目标函数定义为 $F(\mathbf{x})$ 。则式(2-31)可被写为

$$\min F(\mathbf{x}) \quad (2-32)$$

目标函数 $F(\mathbf{x})$ 是一个复合的凸函数，

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \quad (2-33)$$

其中， $g(\mathbf{x})$ 是连续不平滑的凸函数， $f(\mathbf{x})$ 是一个连续的凸函数，且导数具有 Lipschitz 连续的性质，即：

$$\|\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y})\|_2 \leq L(f)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (2-34)$$

$L(f) > 0$ 是 Lipschitz 常量。根据凸函数的性质，凸函数与凸函数的和仍是凸函数。

对于光滑的凸函数 $f(\mathbf{x})$ 来说，一定有

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}) + \langle \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$$

其中， $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ 表示 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 的内积。另外，如果 $f(\mathbf{x})$ 是具有梯度 Lipschitz 连续的凸函数，那么 $f(\mathbf{x})$ 也具有上界^[28]：

$$f(\mathbf{y}) + \langle \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}) + \langle \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle + \frac{L(f)}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 \quad (2-35)$$

由式(2-32)和式(2-33)可知，由于 $g(\mathbf{x})$ 的性质较差，对于求解式(2-32)的问题，可以先求解最小化 $f(\mathbf{x})$ 的问题，将其转换为数学性质较好的形式，再将性质不好的 $g(\mathbf{x})$ 加入求解。

对于最小化 $f(\mathbf{x})$ 的问题，可以用最速下降法求解，其第 k 步的迭代式为：

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} - t_k \nabla f(\mathbf{x}_{k-1}) \quad (2-36)$$

其中， $t_k > 0$ 是第 k 步的步长。我们可以轻易地验证，式(2-36)实际可以转换为求解一个简单的二次优化问题，即：

$$\mathbf{x}_k = \arg \min_x \left\{ f(\mathbf{x}_{k-1}) + \langle (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k-1}), \nabla f(\mathbf{x}_{k-1}) \rangle + \frac{1}{2t_k} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k-1}\|_2^2 \right\} \quad (2-37)$$

将常数项略去，式(2-37)变为，

$$\mathbf{x}_k = \arg \min_x \left\{ \frac{1}{2t_k} \|\mathbf{x} - (\mathbf{x}_{k-1} - t_k \nabla f(\mathbf{x}_{k-1}))\|_2^2 \right\} \quad (2-38)$$

再将不光滑的 $g(\mathbf{x})$ 加入，即可得到：

$$\mathbf{x}_k = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{2t_k} \|\mathbf{x} - (\mathbf{x}_{k-1} - t_k \nabla f(\mathbf{x}_{k-1}))\|_2^2 + g(\mathbf{x}) \right\} \quad (2-39)$$

此时，式(2-39)便是解决式(2-32)问题的迭代式。可以看到，上式中的第一项成为关于 \mathbf{x} 的分量 x_i 可分离的式子。如果 $g(\mathbf{x})$ 同样可分离，那么式(2-39)即从一个高维的优化问题退化为一个 1 维的优化问题。下面将这一理论应用于压缩感知重建问题中。由式(2-31)可知：

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2^2 \\ g(\mathbf{x}) &= \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \end{aligned} \quad (2-40)$$

将式(2-40)代入式(2-39)，可得：

$$\mathbf{x}_k = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{2t_k} \|\mathbf{x} - (\mathbf{x}_{k-1} - t_k \nabla f(\mathbf{x}_{k-1}))\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \right\} \quad (2-41)$$

另外，

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{y}) \quad (2-42)$$

将式(2-42)带入式(2-41)，可得

$$\mathbf{x}_k = p(\mathbf{x}_{k-1}) = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{2t_k} \|\mathbf{x} - (\mathbf{x}_{k-1} - t_k \nabla f(\mathbf{x}_{k-1}))\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \right\} \quad (2-43)$$

$$\mathbf{x}_k = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{2t_k} \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_k\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \right\} \quad (2-44)$$

其中，

$$\mathbf{c}_k = \mathbf{x}_{k-1} - t_k \nabla f(\mathbf{x}_{k-1}) = \mathbf{x}_{k-1} - 2t_k \mathbf{A}^T(\mathbf{Ax}_{k-1} - \mathbf{y}) \quad (2-45)$$

且 \mathbf{c}_k 为可求值的常数。由于式(2-44)的 ℓ_1 范数和 ℓ_2 范数都是变量可分离的。也就是说，可写成 n 个分量优化的求和形式。从而退化成一个一维优化问题。通过初等代数的知识，即可得到，

$$\mathbf{x}_k = \Gamma_{\lambda t_k}(\mathbf{c}_k) \quad (2-46)$$

Γ_α 为收缩算子，它将每一项都做了如下变换：

$$\Gamma_\alpha(\mathbf{c})|_i = (|c_i| - \alpha)_+ \operatorname{sgn}(c_i) \quad (2-47)$$

其中， $(u)_+ = \max(u, 0)$ ，即将 0 值设定为边界。也正是这个原因，基于式(2-46)的算法被称为收缩-边界算法。可以证明，当步长选择为 $t_k \in (0, 1/\|\mathbf{A}^T \mathbf{A}\|)$ 时，(2-31)可以收敛到问题的解。但另一方面，按式(2-46)的迭代方法收敛速度是比较慢的。ISTA 的算法流程如表 2.1 所示

表 2.1 ISTA 流程图

输入： $L = L(f)$ - $\nabla f(\mathbf{x})$ 的 Lipschitz 常数； \mathbf{A} ； \mathbf{y} 。

初始化：设置 \mathbf{x}_0 。

第 k 次迭代($k \geq 1$)：通过式(2-43)即 $p(\mathbf{x}_{k-1})$ 来求解 \mathbf{x}_k 。

ISTA 产生的 $\{\mathbf{x}_k\}$ 序列的收敛速度满足^[26]

$$F(\mathbf{x}_k) - F(\mathbf{x}^*) \leq \frac{L(f) \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|}{2k} \quad (2-48)$$

其中， \mathbf{x}^* 是优化问题的最优解。也就是说，ISTA 的收敛速度为 $O(k^{-1})$ 。

2.3.2 FISTA 复原算法

FISTA(Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Problem)方法是基于 ISTA 方法而提出的快速算法。FISTA 对 ISTA 的改动十分微小，但在收敛速度上却得到了极大的提升。FISTA 算法的流程如表 2.2 所示。

表 2.2 FISTA 算法流程

输入： $L = L(f)$ - $\nabla f(\mathbf{x})$ 的 Lipschitz 常数； \mathbf{A} ； \mathbf{y} 。

初始化：设置 $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, t_1 = 1$ 。

第 k 次迭代($k \geq 1$)：

(i) 通过 $p(\mathbf{y}_k)$ 来求解 \mathbf{x}_k ；

(ii) 计算 $t_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_k^2}}{2}$ ；

(iii) 计算 $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \begin{pmatrix} t_k - 1 \\ t_{k+1} \end{pmatrix} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})$ 。

可以证明，由 FISTA 生成的 $\{\mathbf{x}_k\}$ 序列满足^[26]

$$F(\mathbf{x}_k) - F(\mathbf{x}^*) \leq \frac{2L(f) \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|_2^2}{(k+1)^2} \quad (2-49)$$

很显然，与式(2-48)相比，FISTA 的算法更加快速，其收敛速度为 $O(k^{-2})$

2.4 本章小结

本章主要介绍了本文课题的数学理论基础，包括压缩感知理论、BCCB 矩阵的性质以及十分经典的优化重建算法 ISTA 与 FISTA。

通过本章可以了解光学成像的采样模型是如何与压缩感知理论模型相转换的。光学系统的成像模型是一个卷积模型，如果边界条件为循环边界条件，则卷积模型就可写为矩阵-向量乘积的模型，并且矩阵还具有很好的数学性质，这大大简化了运算、降低了空间存储成本。

复原算法的主要思想是将本来不可变量分离的优化式转换为可以变量分离的优化问题。这样就可以将一个高维的优化问题降为一维的优化问题，使得优化式可以被十分简单地求解。

第三章 经典光学压缩编码成像

本章主要介绍三种经典的光学压缩编码成像架构：单像素相机、高光谱压缩编码孔径成像系统及压缩编码孔径成像系统。并就压缩编码孔径成像系统重建时遇到的问题展开了讨论，提出了改进方法并利用仿真实验分析比较了算法的效果与效率。

3.1 单像素相机与高光谱压缩编码孔径成像介绍

3.1.1 单像素相机

Rice 大学的单像素相机^[8]是一种仅使用一个探测器成像的相机结构。如图 3.1 所示，其利用一组数字微镜阵列(Digital Micromirror Device, DMD)来表示二进制伪随机阵列，测量图像被透镜投影到数字微镜阵列上。该微镜阵列上每个微镜反射方向都是独立的且能被快速改变，所以可在很短时间内测量一序列伪随机投影值。因而投影至 DMD 的光学影像被随机地反射或不反射，反射的影像被再次聚焦成像。通过多次变换 DMD 上的单元，即可在单像素的探测器上获得静态场景的多次测量。测量过程可表示为式(3-1)：

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} = \Phi \Psi \boldsymbol{\theta} \quad (3-1)$$

其中， $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 为场景图像的向量形式， $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为由 0 与 1 两种值构成的观测矩阵，且 $m \ll n$ 。 Φ 的每一行 ϕ_i^T 对应到一次观测，则 \mathbf{y} 的第 i 次观测即为 $\mathbf{y}[i] = \langle \mathbf{x}, \phi_i^T \rangle$ 。 $\Psi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为正交矩阵， $\boldsymbol{\theta}$ 为 \mathbf{x} 在 Ψ 域下的系数。

式(3-1)实际为 CS 架构，可通过求解(2-31)对原图像进行重建。其中， $\mathbf{A} = \Phi \Psi$ 。该结构的一个重要优点是任意一个二进制投影矩阵都可以被轻易地用作该系统的 DMD 模板，因此现有的 CS 理论可以被直接应用到此结构上。虽然该单像素成像系统在物理上成功地实现了 CS 原理，但是该方式极大限制了动态图像的时间分辨率。因此该结构仅能对静态图像成像起到较好的效果。同时，尽管该方法可在低照度下快速连续采集多幅图像，但是由于每次采集都会引入测量噪声，使得该结构不利于连续视频成像。

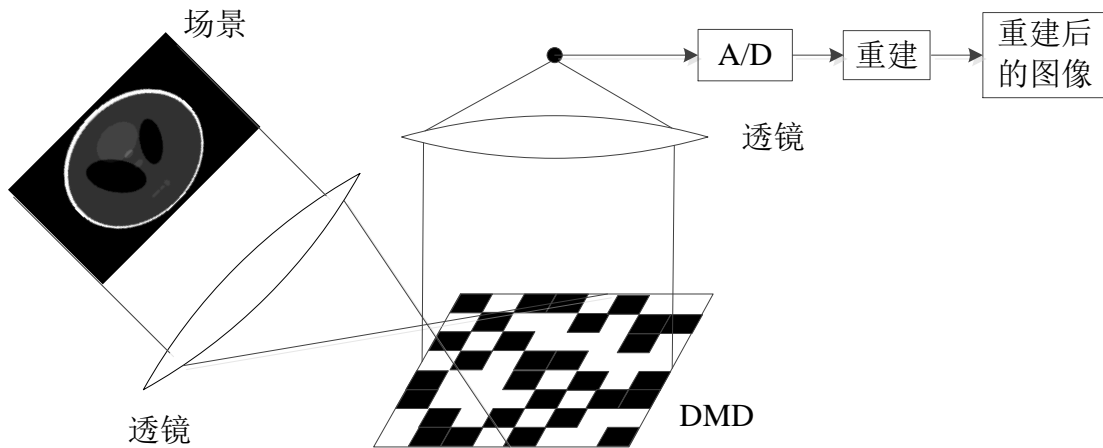


图 3.1 单像素相机结构示意图

3.1.2 高光谱压缩编码孔径成像

2006 年起, Brady 等人在高光谱的压缩成像方面做了大量的工作, 提出“编码孔径快照光谱成像(Coded Aperture Snapshot Spectral Imager, CASSI)”的概念, 并搭建了 DD(Dual Disperser)-CASSI^[29]和 SD(Single Disperser)-CASSI^[30]两套光学实验。

这两种成像仪是使用静态单次快照的设计模式, 使得系统机械结构相对稳健的同时也能够压缩成本。DD-CASSI 系统由两个用于传统色散光谱仪的 $4-f$ 连续色散臂组成, 这两个分光臂相对放置, 这种空间排列使得由第一个分光元件引入的色散在第二个分光元件处互补去除。编码孔径模板放于两臂中间, 用于调制场景的空间信息, 如图 3.2 所示:

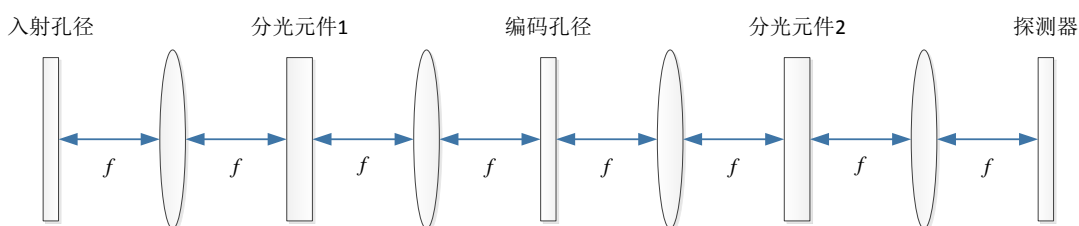


图 3.2 DD-CASSI 系统原理图

下面对 DD-CASSI 系统的成像特点进行定性分析。

首先, 远距离场景通过一个标准中继透镜成像到入射孔径处, 然后入射孔径平面的光场通过第一个 $4-f$ 臂成像到编码孔径模板所在的平面上。在这一过程中, 当光场传播至第一个透镜的后焦面时, 光场为场景的傅里叶变换, 此时的分光元件使得场景根据波长的不同而偏移, 形成了多个与波长相关的空间光场分布。

当光场通过第一个光臂后, 编码孔径对场景的光谱和空间信息进行了混叠。之后通过第二个光臂。第二个光臂解除了由第一个光臂引入的光谱偏移, 在探测器平面成像。在解除第一个臂引入影响的过程中, 由编码孔径引入的空间调制转

变为空间和光谱调制。

从本质上讲，这种双臂编码孔径快照光谱成像仪(DD-CASSI)以牺牲数据立方体的空间信息为代价来获取其光谱信息，场景中每一空间位置的光谱信息被多路复用到探测器阵列的某一局部区域。

在 2007 年，Wagadarikar 等人提出单分光元件编码孔径快照光谱成像仪 (SD-CASSI)。与 DD-CASSI 相似，SD-CASSI 并不对所求三维数据立方体的每一个像素进行直接观测，它仅获取少量的压缩编码后的观测值。在后期重建中，他们使用稀疏重建的方法从噪声映射中重建数据立方体。此系统将场景中各空间位置的光谱信息分散到探测器阵列的一块较大面积的区域上，如此一来，场景的空间和光谱信息就在探测器上被多路复用，这也表明 SD-CASSI 系统的传感操作的零空间与 DD-CASSI 系统的并不相同。通过此系统得到的探测器上关于场景的原始观测几乎不能显示场景的空间结构，这使得对焦操作很困难。

图 3.3 为 SD-CASSI 成像仪示意图。如图所示，标准成像物镜用于将远距离的场景成像于编码孔径平面，编码孔径用编码模板对光谱立方体中所有波长的空间信息进行调制。立方体经过分光元件到达探测器阵列平面在与波长相关的空间位置形成多幅图像，此平面上空间强度模式包含了对空间和光谱信息的编码混合。

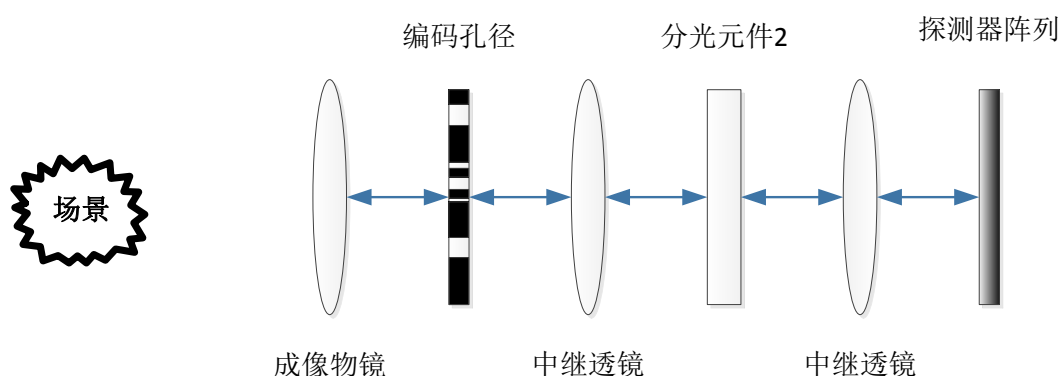


图 3.3 SD-CASSI 系统原理图

在 2007 年，Wagadarikar 等人用波长分别为 543nm 和 632nm 的激光照明一个乒乓球对其成像，以此证明了此系统的光谱成像能力^[31]。但此结构存在视场小，场边缘模糊严重和等边棱镜引入的与波长相关的失真变形等问题。

Wagadarikar 等人针对上述系统的缺陷对其进行了较大改动，其结构如图 3.4 所示，由物镜、编码孔径、带通滤波器、F/8 中继透镜、双阿米西棱镜和单色 CCD 探测器构成。

成像物镜将场景成像于编码孔径平面，经编码孔径编码再经过带通滤波器，中继镜头和双阿米西棱镜到达探测器平面。其中，中继镜头将图像从编码孔径平面传递到 CCD 平面；双阿米西棱镜使得波长为 550nm 的光无偏折而通过棱镜，并

使其相邻波长的光色散到其两旁。只有这样，才能使系统中所有元件都可排列在一条直线上，从而使得此系统在结构上比先前的系统简单许多。再者，由于所有波长的光从棱镜到达 CCD 平面的光路是相近的，进而使与波长相关的畸变失真得到消除。

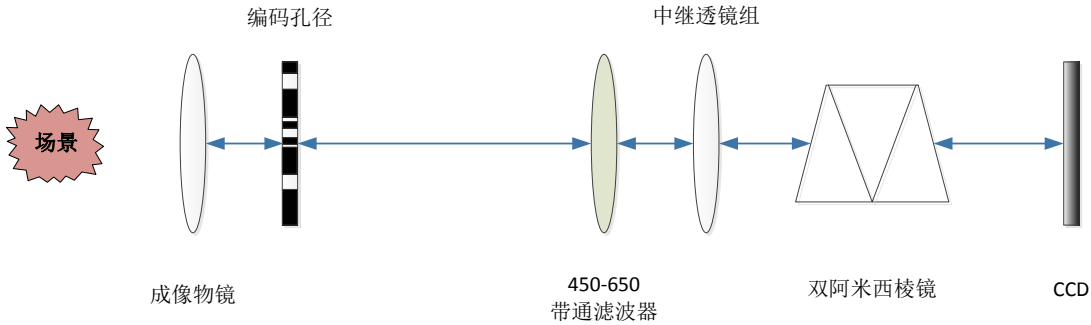


图 3.4 改进的 SD-CASSI 光路示意图

3.2 压缩编码孔径成像系统

3.2.1 编码孔径成像

在小孔成像模型中，小孔的大小是一个难以决定的因素。如图 3.5 所示，当小孔过小时，获得的观测图像曝光量不足；而当孔径过大时，又会得到一个模糊的图像。

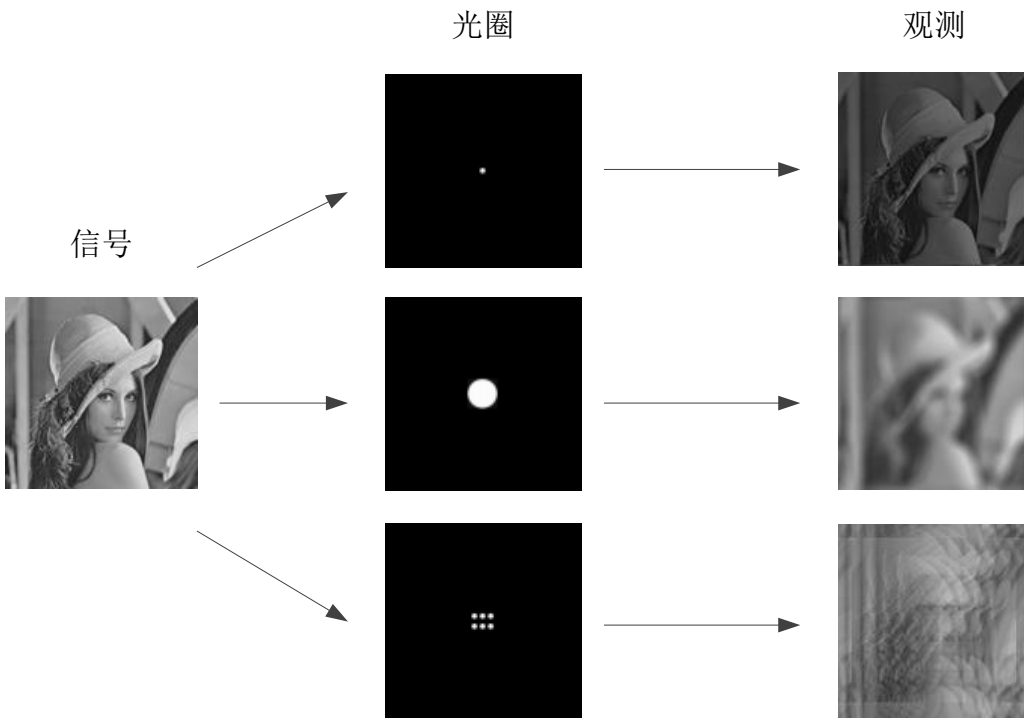


图 3.5 小孔成像

编码孔径的提出解决了这一问题，使得在不牺牲清晰度的前提下提高了光通

量。编码孔径的基本思路是利用一个特定模式的模板（因而此模板可作为已知量）——比如说对一个不透明的板凿多个开孔——增加光学系统的进光量而获得比传统小孔相机明亮且信噪比更高的观测图像。然而，这样的模板对原信号进行了混叠，从而引进了复杂的 PSF，并且获得的图像为原信号的编码图像。利用已知的 PSF 和所获得的观测，可以通过计算获得原图像的高质量重建解。这种技术被广泛地应用在航天和医学领域。而近期对编码孔径的研究发现，编码孔径还不仅可以用来提高图像的分辨率，同时还可以获得物体的深度信息^[32]。

编码孔径成像理论在哈达玛变换光学与伪随机相位模版的基础上发展了成像掩膜。一般普遍认为用于编码孔径成像的最优掩膜模式为修正均匀冗余阵列 (Modified Uniformly Redundant Arrays, MURAs)。这些二值的方阵掩膜模式被记作 H^{MURA} ，掩膜的分辨率与 CCD 的分辨率相同。每一个掩膜都可以设计出其互补模式 H^{recon} ，以使得 $H^{MURA} * H^{recon}$ 为一个冲击函数。

其成像的数学模型为：

$$Y = X * H^{MURA} + E \quad (3-2)$$

图像复原的方法为：

$$\hat{X} = Y * H^{recon} \quad (3-3)$$

就分辨率而言，编码孔径要求 CCD 的分辨率与编码孔径的分辨率相一致。然而，压缩编码孔径成像方法提出了一种可使 CCD 分辨率远小于编码孔径分辨率的方法，这种方法可以采集少量的数据而恢复出与编码孔径分辨率相同的图像信号。这不但降低了 CCD 的制造成本，更降低了图像存储与传输的成本。

3.2.2 压缩编码孔径成像

MURA 模板只适用于无降采样的线性重建，对于降采样、非线性的重建方法，则需要寻找新的适合于模板设计的指导原则。

Roummel F. Marcia 和 Rebecca M. Willett^{[1][7]}在压缩感知的基础上提出的压缩编码孔径(Compressive Coded Apertures, CCA)成像机制表明，当图像可压缩时，可用较少的观测值重构出高分辨率静态图像。压缩编码孔径的观测矩阵成像模型可表示为：

$$Y = D(X^{true} * H^{CCA}) + E \quad (3-4)$$

由 2.2.1 小节的内容可知，(3-4)式也可写为与其等价的向量形式：

$$y = R x^{true} + e = D A^{CCA} x^{true} + e \quad (3-5)$$

(3-4)中 X^{true} 表示在探测器上成的理想像， H^{CCA} 表示压缩编码成像系统的点扩散函数， E 表示噪声量， Y 表示最后得到的观测图像， $D(\cdot)$ 为降采样算子。(3-5)式中，

\mathbf{x}^{true} 、 \mathbf{e} 、 \mathbf{y} 分别为矩阵 \mathbf{X}^{true} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{Y} 的向量形式，压缩矩阵 \mathbf{A}^{CCA} 为 \mathbf{H}^{CCA} 的矩阵形式， \mathbf{D} 为降采样矩阵。

虽然编码孔径成像是从小孔成像发展而来，但压缩编码孔径成像也可以在透镜成像系统中使用。然而在透镜成像系统中，其点扩散函数 \mathbf{H}^{CCA} 会相应改变。根据傅里叶光学^[17]，在相干光成像系统中，有

$$\mathbf{H}^{\text{CCA}} = \mathfrak{Z}(\mathbf{P}) \quad (3-6)$$

而在非相干光成像系统中，有

$$\mathbf{H}^{\text{CCA}} = |\mathfrak{Z}(\mathbf{P})|^2 \quad (3-7)$$

其中， \mathbf{P} 为光瞳函数，也可看为模板本身。在这里，模板 \mathbf{P} 可表示二值模板，即仅由“0”和“1”组成的矩阵，“0”和“1”分别代表黑色和白色的小单元，白色表示光线能够穿过，黑色则相反。另外，模板 \mathbf{P} 也可表示多值模板，这种模板可由多层薄膜叠加制成。其透过率在 $[0,1]$ 区间内可调。由压缩理论可知，使用多值模板时，其图像重建结果好于二值模板的结果。

若图像 \mathbf{x}^{true} 可被小波稀疏分解，即 $\mathbf{x}^{\text{true}} = \mathbf{W}\boldsymbol{\theta}$ ，则式(3-5)可改写为

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{W}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{A}^{\text{CCA}}\mathbf{W}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e} \quad (3-8)$$

为符合压缩感知理论， $\mathbf{R}\mathbf{W}$ 必须满足 RIP 性质。Bajwa 等人^[33]证明了当 \mathbf{A}^{CCA} 为 BCCB 矩阵且第一行符合某种随机分布(如高斯分布)时， $\mathbf{D}\mathbf{A}^{\text{CCA}}\mathbf{W}$ 能很好地满足 RIP 性质。

为了获得编码孔径模板 \mathbf{P} ，首先我们需要设计矩阵 \mathbf{A}^{CCA} ；然后根据 2.2.2 节，通过 \mathbf{A}^{CCA} 的第一列即可获得矩阵 \mathbf{H}^{CCA} 的拉直；得到 \mathbf{H}^{CCA} 后，利用式(3-6)和式(3-7)获得编码模板 \mathbf{P} 。此时， \mathbf{P} 必须为二值模板或多值模板如图 3.6 所示：



(a) 二值模板

(b) 多值模板

图 3.6 压缩编码模板

压缩编码孔径成像一般分为两个模块：即压缩采样模块与重建模块，如图 3.7 所示：

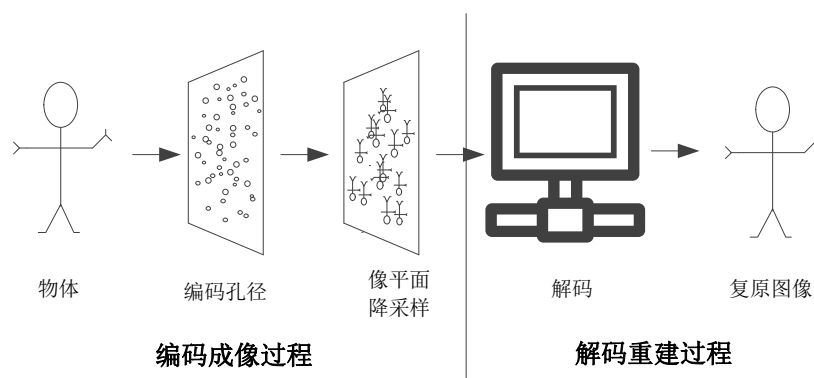


图 3.7 压缩编码孔径成像过程

在压缩采样模块，图像通过插入了编码孔径的光学系统压缩成像，其数学模型可用式(3-5)表示。在重建模块中，压缩编码孔径成像的稀疏重建问题可表示为一个 $\ell_2 - \ell_1$ 最小化问题，即求解下列优化式：

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{R}\mathbf{W}\boldsymbol{\theta}\|_2^2 + \tau \|\boldsymbol{\theta}\|_1 \\ \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{W}\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (3-9)$$

Roummel 等人在解式(3-9)时采用的是稀疏重建的梯度投影(Gradient Projection for Sparse Reconstruction, GPSR)算法^{[21][34]}。这将在下一节作具体叙述。

3.2.3 稀疏重建的梯度投影算法(GPSR)

3.2.3.1 转变为二次优化式

利用梯度投影算法，可以解如式(3-10)的优化问题。

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \tau \|\mathbf{x}\|_1 \quad (3-10)$$

其中， $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ， $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ， $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ 。比较(3-9)式与(3-10)式可知，(3-10)式的 \mathbf{x} 、 \mathbf{A} 和 \mathbf{y} 分别对应(3-9)式的 $\boldsymbol{\theta}$ 、 $\mathbf{R}\mathbf{W}$ 和 \mathbf{y} 。

GPSR 方法的第一个关键步骤为将式(3-10)更改为一个二次式。这可以通过变量分离的方法将 \mathbf{x} 向量分解成正数部分与负数部分来完成^[35]。因此， \mathbf{x} 被写为：

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \quad (3-11)$$

其中， $u_i = (x_i)_+$ ， $v_i = (-x_i)_+$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ， $(\cdot)_+$ 算子表示取某个数的正数部分，也可以表示成 $(x)_+ = \max\{0, x\}$ 。因而， $\|\mathbf{x}\|_1 = \mathbf{I}_n^T \mathbf{u} + \mathbf{I}_n^T \mathbf{v}$ 。其中， $\mathbf{I}_n = [1, 1, \dots, 1]^T$ 为包含 n 个 1 的向量。因而，式(3-10)可转变为一个有边界的二次规划问题：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_2^2 + \tau \mathbf{I}_n^T \mathbf{u} + \tau \mathbf{I}_n^T \mathbf{v} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{u} \geq 0, \mathbf{v} \geq 0 \end{aligned} \quad (3-12)$$

注意到如果将一个偏移向量 $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$ 附加到 \mathbf{u} 与 \mathbf{v} 上, ℓ_2 范数项并不会受到影响, 而其它项会增加 $2\tau \mathbf{I}_n^T \mathbf{s} \geq 0$ 。通过这种方式, (3-12)式可被写为更标准的 BCQP 形式:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{z}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{z} + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z} \equiv F(\mathbf{z}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3-13)$$

其中,

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}, \mathbf{c} = \tau \mathbf{I}_{2n} + \begin{bmatrix} -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

且

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & -\mathbf{A}^T \mathbf{A} \\ -\mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

3.2.3.2 维数问题与计算量

对比式(3-13)与式(3-10), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 而 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}$, 显然未知数的维数增加了一倍。这貌似增加了计算的复杂度, 但事实上, 维数增加一倍只会对计算效率产生较小的影响, 利用矩阵算子 \mathbf{B} 的特殊结构, 算法的效率将会被大大提升。对于一个给定的 $\mathbf{z} = [\mathbf{u}^T \quad \mathbf{v}^T]^T$, 可以得到:

$$\mathbf{B} \mathbf{z} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ -\mathbf{A}^T \mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

这表明 $\mathbf{B} \mathbf{z}$ 的计算可以通过首先计算 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 的差值再依次用 \mathbf{A} 和 \mathbf{A}^T 与之相乘来获得。通过这种方法, 目标函数 $F(\mathbf{z})$ 的梯度 $\nabla F(\mathbf{z}) = \mathbf{c} + \mathbf{B} \mathbf{z}$ 可方便地得出。也就是说, $\nabla F(\mathbf{z})$ 的计算需要两次矩阵与向量的乘积, 而依赖于 $\mathbf{b} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$ 的 \mathbf{c} 值可以提前进行计算。

另外, 为了计算 $F(\mathbf{z})$ 的值, 我们需要计算标量 $\mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z}$ 的值。容易发现,

$$\mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z} = (\mathbf{u} - \mathbf{v})^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \|\mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_2^2 \quad (3-16)$$

这表明此标量只需要做一次矩阵-向量乘积。

必须指出, 如果式(3-10)的解是非负的, 那么(3-12)式就转变为:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & (\tau \mathbf{I}_n - \mathbf{A}^T \mathbf{y})^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3-17)$$

这也是一个 BCQP 问题。可以通过相同的算法来求解。

3.2.3.3 GPSR-BB 求解方法

接下来讨论求解(3-13)式的梯度投影求解方法。首先，通过选择标量参数 $\alpha^{(k)} > 0$ 并且令

$$\mathbf{w}(k) = (\mathbf{z}^{(k)} - \alpha^{(k)} \nabla F(\mathbf{z}^{(k)}))_+ \quad (3-18)$$

之后，选择一个标量 $\lambda^{(k)} \in [0,1]$ 并计算

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} + \lambda^{(k)} (\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{z}^{(k)}) \quad (3-19)$$

基于以上思想，梯度投影有两种算法，分别称为 GPSR-Basic 方法和 GPSR-BB (Barzilai-Borwein)方法。两者的不同在于 $\alpha^{(k)}$ 和 $\lambda^{(k)}$ 的计算不同。GPSR-BB 方法要略好于 GPSR-Basic 方法，因此，下面仅介绍 GPSR-BB 算法。

GPSR-Basic 算法能够保证目标函数的值在每次迭代后都会下降，而 GPSR-BB 方法却没有这个性质。该方法最初是用于平滑非线性函数 F 的无限制最小化问题，它的每一步长都利用公式 $\delta(k) = -\mathbf{H}_k^{-1} \nabla F(\mathbf{z}^{(k)})$ 来计算，其中 \mathbf{H}_k 是目标函数 F 在 $\mathbf{z}^{(k)}$ 处的海森矩阵。由于海森矩阵的求解十分复杂，Barzilai 和 Borwein 提出一种简单的方法来估计海森矩阵：他们令 $\mathbf{H}_k = \eta^{(k)} \mathbf{I}$ ，其中 $\eta^{(k)}$ 为一个合适的值以确保估计的海森矩阵的行为与真正的海森矩阵的行为很近似，即：

$$\nabla F(\mathbf{z}^{(k)}) - \nabla F(\mathbf{z}^{(k-1)}) \approx \eta^{(k)} [\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{z}^{(k-1)}] \quad (3-20)$$

在无约束情况下，迭代公式可写为：

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} - (\eta^{(k)})^{-1} \nabla F(\mathbf{z}^{(k)}) \quad (3-21)$$

这一步骤有可能导致目标函数的增加。这种策略在简单问题上是十分有效的^[36]。

GPSR-BB 方法被扩展应用到 BCQP 问题上^{[37][38]}，这里对其进行描述：将 λ_k 选择为 $[0,1]$ 区间内使式(3-19)最小的值；并用如上所述的方法来选择 $\eta^{(k)}$ ，但 $\alpha^{(k)} = (\eta^{(k)})^{-1}$ 被限制在 $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ 区间内。为了定义表 3.1 中 $\alpha^{(k+1)}$ 的值，我们利用(3-13)式中的定义，有：

$$\nabla F(\mathbf{z}^{(k)}) - \nabla F(\mathbf{z}^{(k-1)}) = \mathbf{B}(\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{z}^{(k-1)}) \quad (3-22)$$

表 3.1 GPSR-BB 算法

初始化：给出 $\mathbf{z}^{(0)}$ ，选择参数 α_{\min} 、 α_{\max} ，初始化 $\alpha^{(0)} \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ ，令 $k=0$

步骤 1（计算步长）：

$$\delta^{(k)} = (\mathbf{z}^{(k)} - \alpha^{(k)} \nabla F(\mathbf{z}^{(k)}))_+ - \mathbf{z}^{(k)}$$

步骤 2（线性搜索）：在区间 $\lambda^{(k)} \in [0,1]$ 内，使用一维线性搜索的方法寻找最小化 $F(\mathbf{z}^{(k)} + \lambda^{(k)} \delta^{(k)})$ 的 $\lambda^{(k)}$ ，并且令 $\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} + \lambda^{(k)} \delta^{(k)}$

步骤 3（更新 α ）：计算：

$$\gamma^{(k)} = (\delta^{(k)})^T \mathbf{B} \delta^{(k)}$$

如果 $\gamma^{(k)} = 0$ ，令 $\alpha^{(k+1)} = \alpha_{\max}$ ，否则令

$$\alpha^{(k+1)} = \text{mid} \left\{ \alpha_{\min}, \frac{\|\delta^{(k)}\|_2^2}{\gamma^{(k)}}, \alpha_{\max} \right\}$$

步骤 4 (测试终止条件): 当满足终止条件时即终止, 并返回 $\mathbf{z}^{(k+1)}$; 若不满足, 则令 $k \leftarrow k+1$ 并跳转到步骤 1。

由于目标函数是二次型的, 因而步骤 2 的参数 $\lambda^{(k)}$ 可以利用下式来计算近似值:

$$\lambda^{(k)} = \text{mid} \left\{ 0, \frac{(\delta^{(k)})^T \nabla F(\mathbf{z}^{(k)})}{(\delta^{(k)})^T \mathbf{B} \delta^{(k)}}, 1 \right\}$$

(当分母 $(\delta^{(k)})^T \mathbf{B} \delta^{(k)} = 0$ 时, 设 $\lambda^{(k)} = 1$)。若使用这种选择参数 $\lambda^{(k)}$ 的方式, 则 BB 方法的目标函数在某些迭代后可能增加这一重要特性, 将不复成立。然而, 在解决压缩编码孔径的问题中, 若设置 $\lambda^{(k)} \equiv 1$ 将会获得比标准的非单调变换更佳的性能。

3.2.3.4 收敛性

梯度投影算法的收敛性可以从 Bertsekas^[39]和 Iusem^[40]的分析中导出, 然而更直接地, 可以从 Birgin, Martinez, Raydan^[41], Serafini, Zanghirati 和 Zanni^[38]中获得。GPSR-Basic 和 GPSR-BB 方法的收敛性总结如下:

定理: GPSR-Basic 算法或 GPSR-BB 算法所得出的解序列 $\{\mathbf{z}^{(k)}\}$ 或者终止于式 (3-13) 的解, 或者以 R-线性速率收敛于式 (3-13)。

3.2.3.5 终止条件

终止条件的选择不仅关系到最终估计解的精确度也关系到求解的速度, 因而较难选择。对于 (3-12), 由于会在后期进行去偏处理 (详见 3.2.3.6), 我们期望近似解 \mathbf{z} 的非 0 分量与真实解 \mathbf{z}^* 的非 0 分量接近。

基于以上考虑, 有几种可行的终止条件方案。最为简单的一种是

$$\|\mathbf{z} - (\mathbf{z} - \bar{\alpha} \nabla F(\mathbf{z}))_+\| \leq \text{tolP} \quad (3-23)$$

其中 tolP 是一个比较小的参数, $\bar{\alpha}$ 是一个比较小的正数。使用这个条件的原因是左式关于 \mathbf{z} 连续, 并且当且仅当 \mathbf{z} 是最优的情况下为 0。

另一种相似的终止条件由线性互补问题 (Linear Complementarity Problems, LCP) 修正而来。 C_{LCP} 为一常数, 它使得:

$$\text{dist}(\mathbf{z}, S) \leq C_{LCP} \|\min(\mathbf{z}, \nabla F(\mathbf{z}))\| \quad (3-24)$$

其中, S 是解(3-13)的解集, $\text{dist}(\cdot)$ 表示距离算子, 右式的 $\min(\cdot)$ 操作符分别对向量元素取最小值, 其结果仍为一向量^[42]。对式(3-24)稍作转变, 可得

$$\|\min(\mathbf{z}, \nabla F(\mathbf{z}))\| \leq \text{tolP} \quad (3-25)$$

第三种最近提出的标准基于对偶理论^[43]。式(3-10)的对偶形式为

$$\begin{aligned} \max_s \quad & -\frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} - \mathbf{y}^T \mathbf{s} \\ \text{s.t.} \quad & -\tau \mathbf{I}_n \leq \mathbf{A}^T \mathbf{s} \leq \tau \mathbf{I}_n \end{aligned} \quad (3-26)$$

对于式(3-26)的可行解 \mathbf{s} , 有

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \tau \|\mathbf{x}\|_1 + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} + \mathbf{y}^T \mathbf{s} \geq 0 \quad (3-27)$$

式中的等号当且仅当 \mathbf{x} 为(3-10)式的解且 \mathbf{s} 为(3-26)式的解时成立。为了构建一个终止条件, 可首先构造一个可行的 \mathbf{s} :

$$\mathbf{s} \equiv \tau \frac{\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})\|_\infty}$$

将上式替换到式(3-27)中, 这样, 我们可以定义终止条件 tolP , 则当值低于 tolP 时终止。

上述的终止条件都没有考虑到 \mathbf{z} 的非 0 索引, 因而在下述的准则中, 当迭代量 $\mathbf{z}^{(k)}$ 中的非零值的相对变化小于一个指定阈值 tolA 时, 则迭代终止。由此, 可定义:

$$\begin{aligned} I_k &= \{i \mid z_i^{(k)} \neq 0\}, \\ C_k &= \{i \mid (i \in I_k \text{ and } i \notin I_{k-1}) \text{ or } (i \notin I_k \text{ and } i \in I_{k-1})\} \end{aligned}$$

当

$$|C_k| / |I_k| \leq \text{tolA} \quad (3-28)$$

对于压缩感知类的问题, (3-28)式给出的终止条件可能更为合适。

3.2.3.6 去偏

当使用 GPSR-Basic 方法或 GPSR-BB 方法得出一个近似解后, 可以对得到的解进行后期处理——去偏。首先, 计算得到的解 $\mathbf{z} = [\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T]^T$ 被转变为近似解 $\mathbf{x}_{GP} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ 。之后, \mathbf{x}_{GP} 的 0 分量被固定为 0, 利用 CG 算法, $\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|$ 被进一步优化^[44]。在代码中, CG 迭代方法的终止条件为

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq \text{tolD} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}_{GP}\|_2^2 \quad (3-29)$$

其中, tolD 是一个小的正数。

事实上, 式(3-10)被用来给出 \mathbf{x} 的非零元素的位置, 而去偏的步骤将非零元素位置上的值进一步优化而不考虑正则化项 $\tau \|\mathbf{x}\|_1$ 。类似的技术也被应用在其他基于

ℓ_1 范数的算法上^[45]。另外需要指出, 去偏并非必需步骤, 有时可能会产生较大的噪声。

3.2.3.7 计算复杂度分析

想要精确地预计 GPSR-Basic 和 GPSR-BB 方法找到估计解所需要的迭代次数几乎是不可能的。然而我们可以分析这些算法每次迭代的算法复杂度。每次迭代的计算量为一些向量内积、向量数乘、向量加法, 需要 n 或 $2n$ 个浮点运算, 另外需要极少量的与 \mathbf{A} 或 \mathbf{A}^T 进行的矩阵-向量乘法。当 $\mathbf{A}=\mathbf{R}\mathbf{W}$, 这些操作就包含了矩阵 \mathbf{R} , \mathbf{R}^T , \mathbf{W} 和 \mathbf{W}^T 与向量的乘积。在去偏阶段, 每次 CG 迭代所需要的计算量与每次 GPSR 迭代所需要的计算量相当或者更低。它仅仅需要与 \mathbf{R} 、 \mathbf{R}^T 、 \mathbf{W} 、 \mathbf{W}^T 作一次乘积再加上一些简单的向量运算。接下来将分析矩阵 \mathbf{R} 、 \mathbf{R}^T 、 \mathbf{W} 、 \mathbf{W}^T 与向量乘积的计算复杂度问题。首先回顾一下, $\mathbf{A}=\mathbf{R}\mathbf{W}$ 是一个 $k \times n$ 的矩阵, 且 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ 。因此, 若 \mathbf{R} 是一个 $k \times d$ 的矩阵, 那么 \mathbf{W} 一定是一个 $d \times n$ 的矩阵。

如果 \mathbf{W} 为正交小波基($d=n$), 矩阵-向量乘积可以利用快速小波变换算法而获得, 其算法复杂度为 $O(n)$ ^[46], 而非真正矩阵-向量乘法的 $O(n^2)$ 。因此, 矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{A}^T 与向量乘积的算法复杂度为 $O(n)$ 加上与 \mathbf{R} 或 \mathbf{R}^T 相乘的算法复杂度。在压缩编码孔径成像的应用中, \mathbf{R} 或 \mathbf{R}^T 矩阵与向量相乘的问题实际为卷积问题^[47]。 \mathbf{R} 是一个 BCCB 矩阵。则这样的矩阵-向量乘积可以通过快速傅里叶变换来完成。其算法复杂度为 $O(n \log n)$, 而直接的矩阵向量相乘的算法复杂度为 $O(n^2)$ 。

3.3 压缩编码孔径成像重建方法改进

利用梯度投影算法的方法来解决稀疏重建的问题会使得重建后的图像有大量的伪影(artifacts)。本小节着重解决伪影的问题。

3.3.1 全变分(Total Variation, TV)(半)范数

若有连续的二元信号 $u(x, y)$, 其在区域 Ω 上有定义, 则其连续有界的全变分模型为:

$$\text{TV}[u(x, y)] = \iint_{\Omega} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

采样后的图像可以认为是被离散化后的矩阵。设矩阵为 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 则矩阵的 TV 范数有两种定义形式。一种是各向同性(isotropic)的 TV 范数, 表示为 TV_I , 另一种是各项异性(anisotropic)的 TV 范数, 表示为 TV_A , 它们分别如下定义:

$$\begin{aligned} \text{TV}_I(\mathbf{X}) &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i,j} - x_{i+1,j})^2 + (x_{i,j} - x_{i,j+1})^2} \\ &+ \sum_{i=1}^{m-1} |x_{i,n} - x_{i+1,n}| + \sum_{j=1}^{n-1} |x_{m,j} - x_{m,j+1}| \end{aligned} \quad (3-30)$$

$$\begin{aligned} \text{TV}_A(\mathbf{X}) &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \{|x_{i,j} - x_{i+1,j}| + |x_{i,j} - x_{i,j+1}|\} \\ &+ \sum_{i=1}^{m-1} |x_{i,n} - x_{i+1,n}| + \sum_{j=1}^{n-1} |x_{m,j} - x_{m,j+1}| \end{aligned} \quad (3-31)$$

事实上, TV_I 范数可以理解为离散图像信号经过横向和纵向差分后的 ℓ_2 范数; 而 TV_A 范数可以被理解为图像差分后的 ℓ_1 范数。由于使用 TV_I 和 TV_A 所得到的结果相差不大, 为了避免重复性问题, 在这里如果不加特殊说明, TV 范数都指各向同性的 TV 范数(TV_I)。

无噪图像的 TV 范数是很小的。这是因为对于图像而言, 低频部分的分量远高于高频部分的分量。也就是说, 图像灰度值的平滑部分远高于变化剧烈的部分。因此, TV 范数常常被用来做图像去噪^{[48][49]}。

3.3.2 基于全变分的图像去噪方法

图像去噪的问题可以写成如下的数学表达式:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \|\mathbf{X} - \mathbf{B}\|_F^2 + 2\lambda \|\mathbf{X}\|_{\text{TV}} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{X} \in \mathbf{B}_{l,u} \equiv \{x_{ij}, l \leq x_{ij} \leq u\} \end{aligned} \quad (3-32)$$

其中, \mathbf{B} 为含噪图像, \mathbf{X} 为需要求解的无噪图像。 $\|\cdot\|_F$ 表示矩阵的 Frobenius 范数。其定义为

$$\|\mathbf{X}\|_F \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |x_{ij}|^2} \quad (3-33)$$

(3-32)式的 l 与 u 为图像灰度值的上边界与下边界。加入边界的限制可以使得重建的图像得到更真实的效果。一般来说, 数字图像的范围为 $[0,255]$ 或归一化后的 $[0,1]$ 区间内。Amir Beck 等人的基本思路是构造(3-32)的对偶问题, 使得(3-32)去除边界条件后的最小化问题可以通过基于梯度的算法给出^{[49][50]}。

为了描述这个算法, 需要再定义四项:

一、令 \mathcal{P} 表示矩阵对 (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) , 即 $\mathcal{P} = (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ 。其中 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{(m-1) \times n}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times (n-1)}$, 并且满足:

$$\begin{aligned}
p_{i,j}^2 + q_{i,j}^2 &\leq 1, & \text{若 } 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1 \\
|p_{i,n}| &\leq 1, & \text{若 } 1 \leq i \leq m-1 \\
|q_{m,j}| &\leq 1, & \text{若 } 1 \leq j \leq n-1
\end{aligned} \tag{3-34}$$

二、定义线性算子 \mathcal{L} ，将 \mathcal{P} 的 (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) 对映射为一个 $m \times n$ 的矩阵：

$$(\mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}))_{i,j} = p_{i,j} - p_{i-1,j} + q_{i,j} - q_{i,j-1}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \tag{3-35}$$

其中 $p_{0,j} = p_{m,j} = q_{i,0} = q_{i,n} = 0, (i=1, \dots, m \text{ 且 } j=1, \dots, n)$

三、线性算子 \mathcal{L} 的伴随算子 \mathcal{L}^T ，将 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 的矩阵映射到矩阵对 (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) 所在的 \mathcal{P} 空间上，并定义为：

$$\mathcal{L}^T(\mathbf{X}) = (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \tag{3-36}$$

其中

$$\begin{aligned}
p_{i,j} &= x_{i,j} - x_{i+1,j}, & 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n \\
q_{i,j} &= x_{i,j} - x_{i,j+1}, & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1
\end{aligned} \tag{3-37}$$

四、最后，定义投影到集合 C 上的正交投影算子 $P_C(\cdot)$ 。特别地，如果集合 C 为式(3-32)中的边界集合 $B_{l,u}$ ，则有

$$\left(P_{B_{l,u}}(\mathbf{X}) \right)_{i,j} = \begin{cases} l & \text{若 } x_{i,j} < l \\ x_{i,j} & \text{若 } l \leq x_{i,j} \leq u \\ u & \text{若 } x_{i,j} > u \end{cases} \tag{3-38}$$

定理 4^[49]：令 (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) 为如下对偶问题的解

$$\min_{(\mathbf{P}, \mathbf{Q})} h(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \equiv -\|H_{B_{l,u}}(\mathbf{B} - \lambda \mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}))\|_F^2 + \|\mathbf{B} - \lambda \mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})\|_F^2 \tag{3-39}$$

其中

$$H_{B_{l,u}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - P_{B_{l,u}}(\mathbf{X}) \tag{3-40}$$

则(3-32)的解(其中 TV 为 TV_1)为，

$$\mathbf{X} = P_{B_{l,u}}(\mathbf{B} - \lambda \mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})) \tag{3-41}$$

另外可以得到， $h(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ 是连续可导的，其梯度为：

$$\nabla h(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = -2\lambda \mathcal{L}^T P_{B_{l,u}}(\mathbf{B} - \lambda \mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})) \tag{3-42}$$

由定理 4 及式(3-42)以及其它的分析^[49]，可得到相应的梯度投影算法，算法框架如表 3.2 所示：

表 3.2 TV 去噪梯度投影算法

输入：含噪图像 \mathbf{B} 、正则化参数 λ ，以及迭代次数 K 。

输出：关于式(3-32)的优化解 \mathbf{X}^*

初始化：设置 $(\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0) = (\mathbf{0}_{(m-1) \times n}, \mathbf{0}_{m \times (n-1)})$

第 k 步: ($k=1,2,\dots,K$)计算

$$(\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k) = P_{\mathcal{P}} \left\{ (\mathbf{P}_{k-1}, \mathbf{Q}_{k-1}) + \frac{1}{8\lambda} \mathcal{L}^T \left(P_{B_{i,u}} \left[\mathbf{B} - \lambda \mathcal{L}(\mathbf{P}_{k-1}, \mathbf{Q}_{k-1}) \right] \right) \right\} \quad (3-43)$$

$$\text{则 } \mathbf{X}^* = P_{B_{i,u}} \left[\mathbf{B} - \lambda \mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \right]$$

其中, $P_{\mathcal{P}}$ 表示从矩阵对 (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) 到另一组矩阵对 (\mathbf{R}, \mathbf{S}) 的一个映射。映射关系如下:

$$r_{i,j} = \begin{cases} \frac{p_{i,j}}{\max \left\{ 1, \sqrt{p_{i,j}^2 + q_{i,j}^2} \right\}}, & i=1, \dots, m-1, j=1, \dots, n-1 \\ \frac{p_{i,n}}{\max \left\{ 1, |p_{i,n}| \right\}}, & i=1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (3-44)$$

$$s_{i,j} = \begin{cases} \frac{q_{i,j}}{\max \left\{ 1, \sqrt{p_{i,j}^2 + q_{i,j}^2} \right\}}, & i=1, \dots, m-1, j=1, \dots, n-1 \\ \frac{q_{m,j}}{\max \left\{ 1, |q_{m,j}| \right\}}, & j=1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Amir Beck 等人还提出了一种更为快速的梯度投影算法^[49], 其思路与 ISTA 到 FISTA 的扩展思路差不多。其算法框架如表 3.3 所示:

表 3.3 TV 去噪的快速梯度投影算法

输入: 含噪图像 \mathbf{B} 、正则化参数 λ , 以及迭代次数 K 。

输出: 关于式(3-32)的优化解 \mathbf{X}^*

初始化: 设置 $(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}_1) = (\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0) = (\mathbf{0}_{(m-1) \times n}, \mathbf{0}_{m \times (n-1)})$, $t_1 = 1$

第 k 步: ($k=1,2,\dots,K$)计算

$$(\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k) = P_{\mathcal{P}} \left\{ (\mathbf{R}_k, \mathbf{S}_k) + \frac{1}{8\lambda} \mathcal{L}^T \left(P_{B_{i,u}} \left[\mathbf{B} - \lambda \mathcal{L}(\mathbf{R}_k, \mathbf{S}_k) \right] \right) \right\} \quad (3-45)$$

$$t_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_k^2}}{2} \quad (3-46)$$

$$(\mathbf{R}_{k+1}, \mathbf{S}_{k+1}) = (\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k) + \begin{pmatrix} t_k - 1 \\ t_{k+1} \end{pmatrix} (\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_{k-1}, \mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}) \quad (3-47)$$

$$\text{则 } \mathbf{X}^* = P_{B_{i,u}} \left[\mathbf{B} - \lambda \mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \right]$$

为了去除 3.2.3 小节重建后所引入的伪影, 我们将 3.3.2 节所述的图像去噪方法作为 3.2.3 小节重建后的图像的后期处理方法, 较好地去除了伪影, 并保持了边缘特性^[2], 但这种方法也带来了一定的问题。

虽然基于全变分的去噪方法较好地将图像重建引入的伪影去除了, 而且保持了大多数边缘。然而, 对于一些与噪声特性十分接近的边缘信息, 全变分去噪方法也将其滤除。例如 Cameraman 中的草地, 就会被认为是噪声而被滤除。

另一方面, 从信息论的角度来看, 在第一次重建之后, 所得到的图像的熵就

已经减小了, 如果对重建后的图像再进行处理, 则图像的熵会再一次下降。因而作者提出, 如果将 TV 项直接加入重建的过程中, 将会保留更多的信息, 从而重建出更真实、更高质量的图像。

3.3.3 基于全变分的重建方法

将 TV 范数加入压缩编码孔径的重建模型中, 可以将重建模型写为如下形式:

$$\hat{\mathbf{X}} = \min_{\mathbf{X}} \alpha \|\mathbf{X}\|_{\text{TV}} + \beta \|\Psi \mathbf{x}\|_1 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \quad (3-48)$$

通过式(3-48)与式(3-9)的比较可知, \mathbf{X} 为重建后图像的真实值; $\hat{\mathbf{X}}$ 为重建后图像的估计值; $\boldsymbol{\theta} = \Psi \mathbf{x} = \mathbf{W}^T \mathbf{x}$, 即 $\Psi = \mathbf{W}^T$; $\mathbf{A} = \mathbf{R} = \mathbf{D}\mathbf{A}^{\text{CCA}}$; $\alpha \geq 0$ 、 $\beta \geq 0$ 、 $\mu > 0$ 为权衡因子, 但 α 与 β 不能同时为 0。另外, 这个算法对于各向同性的 TV 范数和各向异性的 TV 范数都可以处理, 但本文仅以各向同性的 TV 范数为例, 其结果可以很容易地被推广到各向异性的 TV 范数。另外, 为了方便, 用 ψ_i^T 表示 Ψ 的第 i 行, 用矩阵 \mathbf{C} 表示 BCCB 矩阵 \mathbf{A}^{CCA} ; 为了取消歧义性, 将降采样矩阵 \mathbf{D} 用矩阵 \mathbf{P} 来表示, 则(3-48)式可被写为:

$$\hat{\mathbf{x}} = \min_{\mathbf{x}} \alpha \sum_{i=1}^{n^2} \|\mathbf{D}_i \mathbf{x}\| + \beta \sum_{i=1}^{n^2} |\psi_i^T \mathbf{x}| + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \quad (3-49)$$

其中, $\mathbf{D}_i \in \mathbb{R}^{2 \times n^2}$ 为局部有限差分算子。对于式(3-49), 可以很容易地将其扩展为带有非负约束的优化问题, 即图像信号 $\mathbf{x} \geq 0$ 。

总的来说, 与 2.3.1 节的思路类似, 可以使用分离变量的方法使得问题变为 $\min \{f(\mathbf{L}\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\}$, 从而获得 $\min \{f(\mathbf{y}) + g(\mathbf{x}) : \mathbf{L}\mathbf{x} - \mathbf{y} = 0\}$, 之后可使用拉格朗日方法将上式变为

$$\min f(\mathbf{y}) + \langle \lambda, \mathbf{L}\mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{L}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + g(\mathbf{x})$$

这种分离变量的技术一开始被应用在带有 TV 正则项的图像去卷积问题上^[51]。在分离变量思路的指导下, 将(3-49)式改写为:

$$\min_{\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{x}} \left\{ \alpha \sum_i \|\mathbf{y}_i\| + \beta \sum_i |\mathbf{z}_i| + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{P}\mathbf{u} - \mathbf{b}\|_2^2 \right\} \quad (3-50)$$

其中, $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}$, $\mathbf{y}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{x}$, $\mathbf{z}_i = \psi_i^T \mathbf{x}$, $i = 1, 2, \dots, n^2$ 。

对于 $s, t, \rho \in \mathbb{R}$ 及 $s, t, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, 定义

$$\begin{aligned} \varphi_1(s, t, \rho) &= |s| - \rho(s - t) + \frac{\beta_1}{2} \|s - t\|^2 \\ \varphi_2(s, t, \mathbf{v}) &= \|s\| - \mathbf{v}^T (s - t) + \frac{\beta_2}{2} \|s - t\|^2 \end{aligned} \quad (3-51)$$

其中, $\beta_1, \beta_2 > 0$ 是参数。则(3-50)式的带参拉格朗日函数可以写为:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) &= \alpha \sum_i \varphi_2(\mathbf{y}_i, \mathbf{D}_i \mathbf{x}, (\lambda_2)_i) + \beta \sum_i \varphi_1(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\Psi}_i^T \mathbf{x}, (\lambda_1)_i) \\ &+ \frac{\beta_3}{2} \left\| \mathbf{u} - \mathbf{C}\mathbf{x} - \frac{\lambda_3}{\beta_3} \right\|^2 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{P}\mathbf{u} - \mathbf{b}\|^2 \end{aligned} \quad (3-52)$$

其中, $\beta_3 > 0$ 为惩罚因子, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 包含了拉格朗日乘子。对于每个 i , $(\lambda_1)_i \in \mathbb{R}$, $(\lambda_2)_i \in \mathbb{R}^2$ 且 $\lambda_3 \in \mathbb{R}^{n^2}$ 。给定 $(\mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{x}^k)$ 和 $\boldsymbol{\lambda}^k$, 经典的 ALM 框架^{[52][53]} (Augmented Lagrangian Method) 对式(3-50)做如下的迭代处理:

$$\begin{cases} (\mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{x}^{k+1}) \leftarrow \arg \min \mathcal{L}_A(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^k), \\ (\lambda_1)_i^{k+1} \leftarrow (\lambda_1)_i^k - \gamma_1 \beta_1 (\mathbf{z}_i^{k+1} - \boldsymbol{\Psi}_i^T \mathbf{x}^{k+1}), \forall i, \\ (\lambda_2)_i^{k+1} \leftarrow (\lambda_2)_i^k - \gamma_2 \beta_2 (\mathbf{y}_i^{k+1} - \mathbf{D}_i \mathbf{x}^{k+1}), \forall i, \\ (\lambda_3)^{k+1} \leftarrow (\lambda_3)^k - \gamma_3 \beta_3 (\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{C}\mathbf{x}^{k+1}) \end{cases} \quad (3-53)$$

在 ALM 框架中, 每一次迭代都需要对 $\mathcal{L}_A(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^k)$ 做精确的最小化, 这会引入较大的计算量。然而可以发现, 对于固定的 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 \mathbf{x} , \mathcal{L}_A 的 \mathbf{y}, \mathbf{z} 和 \mathbf{u} 变量是分离的。为了利用这一特性, 可以使用 ADM (alternating direction method of multipliers) 方法^{[54][55]}。这种方法已成功应用到多种信号重建和图像重建的应用中^[56]。

在此, 通过交替最小化 $(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u})$ 和 \mathbf{x} 来达到降低 $\mathcal{L}_A(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^k)$ 的目的:

$$\begin{cases} (\mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1}) \leftarrow \arg \min \mathcal{L}_A(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) \\ \mathbf{x}^{k+1} \leftarrow \arg \min \mathcal{L}_A(\mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^k) \end{cases} \quad (3-54)$$

然后按照(3-53)式的方法迭代更新拉格朗日乘子。对于固定的 $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^k$ 和 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k$, 由于 $\mathcal{L}_A(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k)$ 关于 \mathbf{y}, \mathbf{z} 和 \mathbf{u} 是相互独立的, 因而关于 $(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u})$ 的联合最小化实际可以分解为三个独立的最优化并可以并行执行。其中, \mathbf{z}^{k+1} 的优化式为:

$$\mathbf{z}_i^{k+1} \leftarrow \arg \min_{\mathbf{z}_i} \varphi_1(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\Psi}_i^T \mathbf{x}^k, (\lambda_1)_i^k) \triangleq S_1(\boldsymbol{\Psi}_i^T \mathbf{x}^k + (\lambda_1)_i / \beta_1, 1/\beta_1), \forall i \quad (3-55)$$

其中, $S_1(\cdot, 1/\beta_1)$ 为一维收缩算子, 定义为 $(\max\{|\xi| - 1/\beta_1, 0\} \cdot \text{sgn}(\xi))$, $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数; \mathbf{y}^{k+1} 的优化式为:

$$\mathbf{y}_i^{k+1} \leftarrow \arg \min_{\mathbf{y}_i} \varphi_2(\mathbf{y}_i, \mathbf{D}_i \mathbf{x}^k, (\lambda_2)_i^k) \triangleq S_2(\mathbf{D}_i \mathbf{x}^k + (\lambda_2)_i^k / \beta_2, 1/\beta_2), \forall i \quad (3-56)$$

其中, $S_2(\cdot, 1/\beta_2)$ 为二维收缩算子, 定义为 $(\max\{\|\mathbf{s}\| - 1/\beta_2, 0\} \cdot \mathbf{s} / \|\mathbf{s}\|)$, 并规定 $0 \cdot (0/0) = 0$, \mathbf{u} 的值可由下式获得

$$\mathbf{u}^{k+1} \leftarrow (\mathbf{I} + (\mu/\beta_3)\mathbf{P}^T\mathbf{P})\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}^k + (\lambda_3^k + \mu\mathbf{P}^T\mathbf{b})/\beta_3 \quad (3-57)$$

其中, \mathbf{I} 表示单位矩阵。由于 \mathbf{P} 是一个选择矩阵, 因此 $\mathbf{P}^T\mathbf{P}$ 为对角矩阵, 因而(3-57)式的解可以很轻易地获得。 $\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}$ 的计算复杂度与 \mathbf{x} 的维度线性相关。

在 ADM 框架, 即式(3-54)的第二步骤中, \mathbf{x} 的获取实际为一个最小二乘问题:

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{D}^T(\beta_2\mathbf{y}^{k+1} - \alpha\lambda_2^k) + \beta\boldsymbol{\Psi}^T(\beta_1\mathbf{z}^{k+1} - \lambda_1^k) + \mathbf{C}^T(\beta_3\mathbf{u}^{k+1} - \lambda_3^k) \quad (3-58)$$

其中, $M = \alpha\beta_2 D^T D + \beta_1 \Psi^T \Psi + \beta_3 C^T C$, $D \in \mathbb{R}^{2n^2 \times n^2}$ 为全局有限差分算子。在周期边界条件下, $D^T D$ 为 BCCB 矩阵。由于 C 也是一个 BCCB 矩阵, 而 Ψ 是一个正交矩阵, 因此, 系数矩阵 M 是可被二维傅里叶变换矩阵对角化的。因此, (3-58) 式的解包含两个快速傅立叶变换(详见 2.2.2 节)。最后, 可以按照(3-53)式的方法来更新拉格朗日乘子。整个关于求解式(3-49)的算法流程被归纳在表 3.4 中。可以证明当 $\gamma_i \in (0, (\sqrt{5}+1)/2)$ 时, 可以收敛^[57]。

表 3.4 基于全变分的重建方法流程图

ADM: 输入数据 P, C, Ψ, b , 参数 $\alpha, \beta \geq 0$ 以及 $\mu > 0$ 。给定 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$, 初始化 $x = x^0, \lambda = \lambda^0$ 并设定 $k = 0$ 。

当未达到终止条件时:

- 1) 根据式(3-55)、式(3-56)和式(3-57)获取 $z^{k+1}, y^{k+1}, u^{k+1}$;
 - 2) 利用快速傅立叶变换解(3-58)式而获得 x^{k+1} ;
 - 3) 通过(3-53)式的 2-4 行来更新 λ 。
-

最佳的模型参数 α 、 β 和 μ 应由数据来决定。而典型的, γ 的值一般取为 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1.618$, 另外在仿真过程中, 取 $\beta_1 = \beta_2 = 10$ 。 β_3 的最佳取值与数据有关。建议 β_3 取在 1-20 之间。

3.4 仿真实验与分析

在这一节中, 选取了 Phantom、Brain 以及 Blocks 这三幅图像, 并利用 1) GPSR 方法(简称为 GPSR); 2) GPSR 重建+后期 TV 去噪方法(简称为 GPSR+TV); 3) 将 TV 范数加入重建过程中的 ADM 重建方法(简称为 ADM 方法)这三种方法进行重建, 并对其效果和性能进行了比较。

3.4.1 重建效果比较

在图 3.8 中, (a)图为 Phantom 原图, 其分辨率为 256×256 , 将其认为真实场景。作为参考, (b)图为(a)图一般成像后的降采样图像, 其分辨率为 128×128 像素。(c)图为使用压缩编码孔径成像后的低分辨率图像, 其分辨率亦为 128×128 像素。(d)、(e)、(f)图为将(c)图在计算机上恢复重建为 256×256 像素后的图像, 所使用的重建方法分别为: GPSR 重建、GPSR 重建+TV 去噪、ADM 重建。可以明显地看到, (d)、(e)、(f)三幅重建图像都恢复了(a)图的大量高频信息。然而, 使用 GPSR 重建后的图像含有大量的伪影。(e)图在(d)图的基础上加入 TV 去噪后, 伪影减轻了很多, 而利用 ADM 的重建几乎看不到任何伪影, 效果最好。

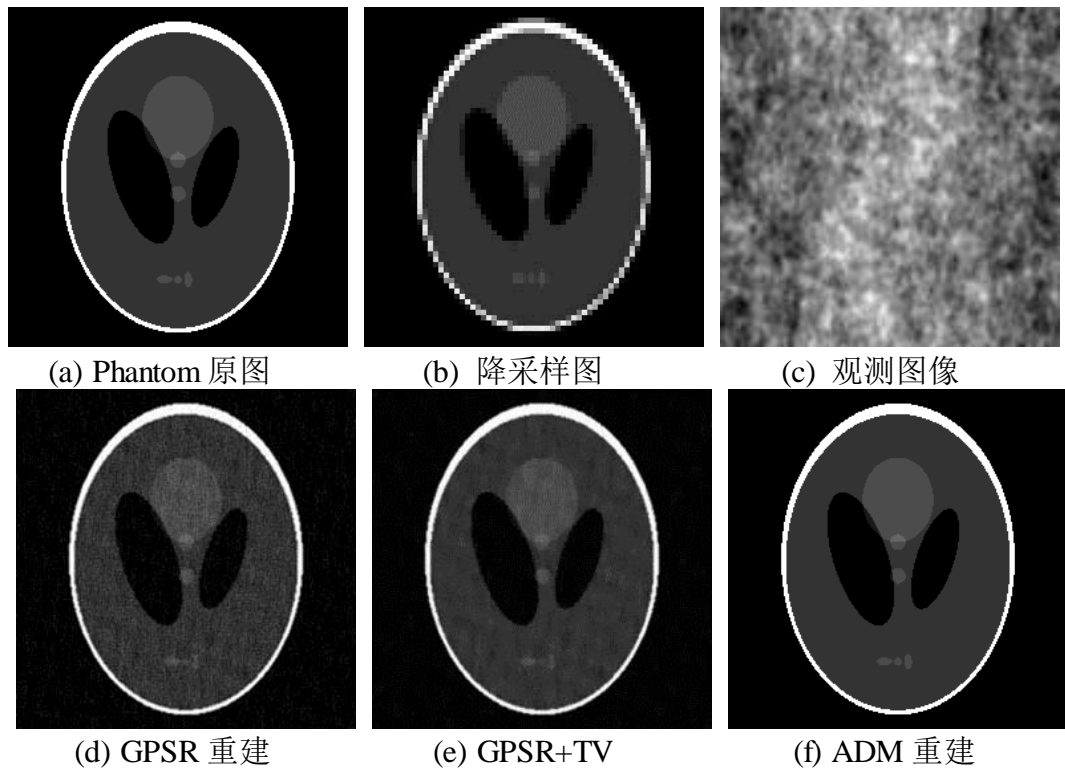
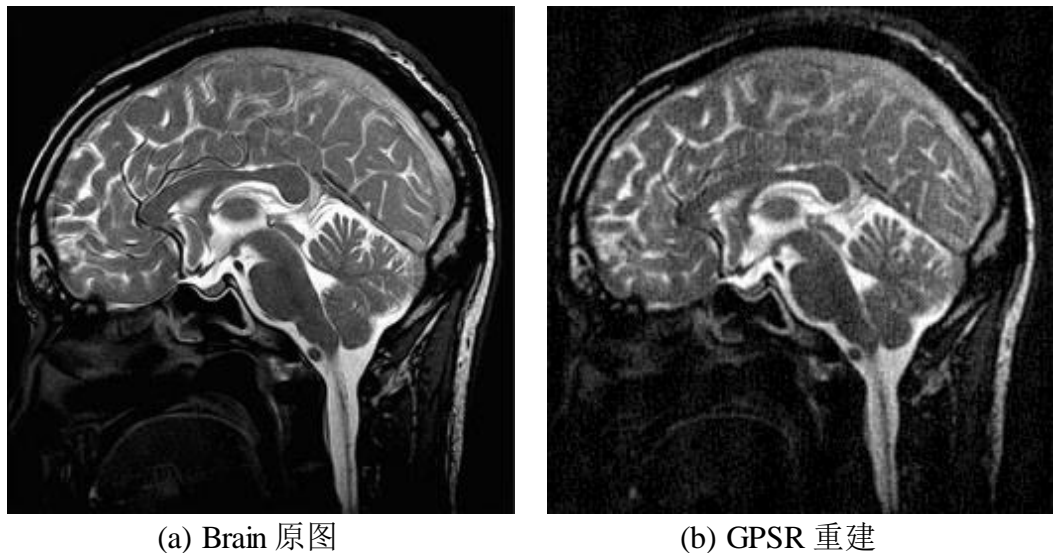


图 3.8 phantom 图重建效果比较图

接下来，又对 **Brain** 和 **Blocks** 两幅图进行了重建，其结果如图 3.9、图 3.10 所示。从图中我们可以看到，对于 **Brain** 图像，三种方法的重建效果差异不是特别明显，而对于 **Blocks** 图像，我们可以明显地发现，使用 **GPSR** 和 **GPSR+TV** 方法重建后的图像的小方块很不清晰，然而 **ADM** 方法却能将小方块很好地重建。



(a) Brain 原图

(b) GPSR 重建

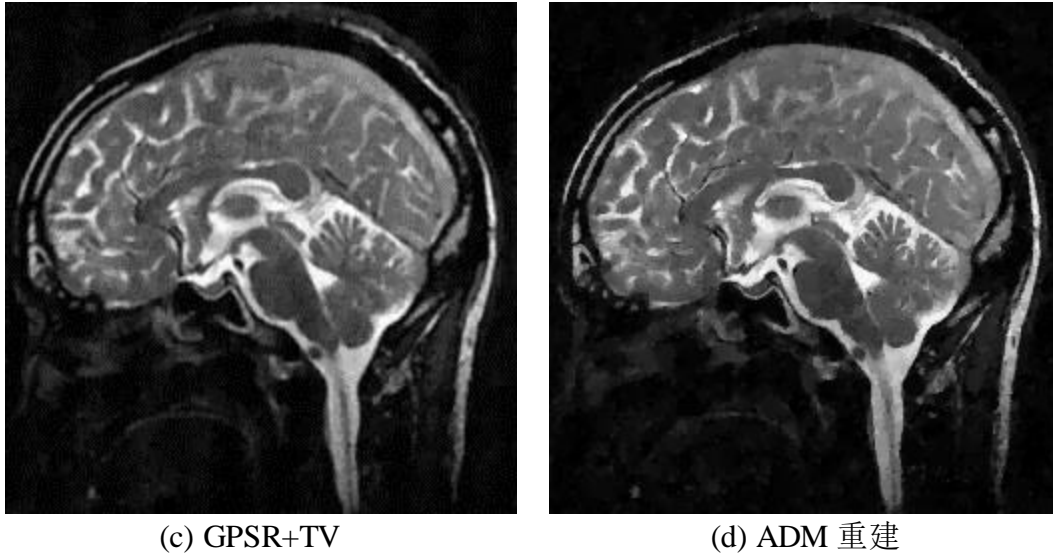


图 3.9 brain 图重建效果比较图

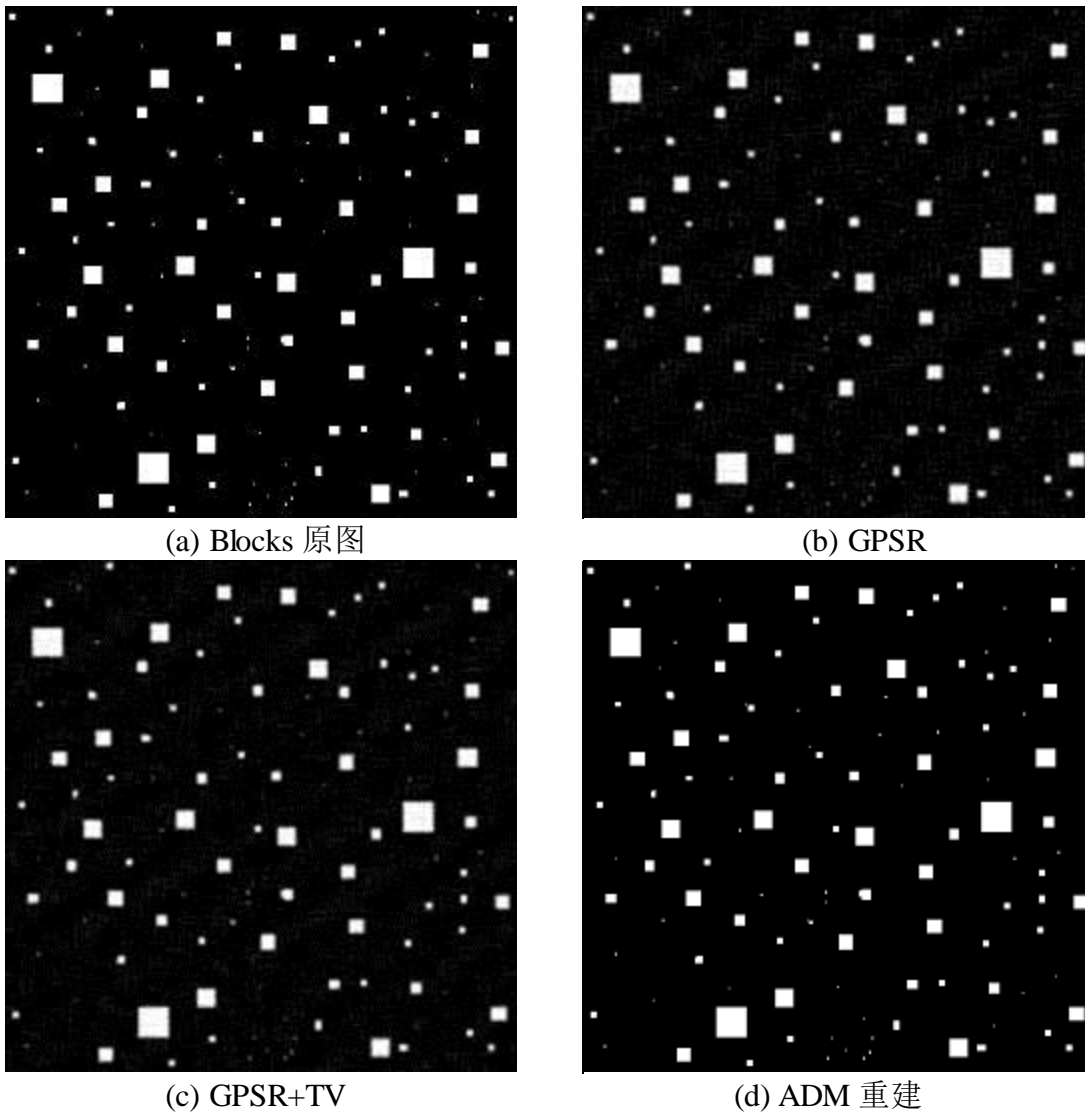


图 3.10 blocks 图重建效果比较图

这三组实验的信噪比结果被记录于表 3.5 中。从表中可以看出，对于任意图片，

用 GPSR 方法重建的效果都不及利用 GPSR+TV 方法重建的效果；而用 GPSR+TV 方法重建的效果又不如 ADM 方法重建的效果。特别是对于 Phantom 和 Blocks 这两幅图像而言，ADM 方法重建图像的 SNR 要远大于其它两种方法重建的图像。

表 3.5 不同方法的信噪比比较

SNR	GPSR	GPSR+TV	ADM
phantom	11.3	12.4	48.5
brain	13.3	13.9	14.0
blocks	10.7	12.1	66.2

3.4.2 时间复杂度比较

表 3.6 为三种不同的方法在重建图像时所需要的时间。这里，GPSR 方法都采用最多 300 次主迭代和最多 200 次去偏迭代。可以看到，ADM 方法的总体时间比其它两种方法的时间要短。而 GPSR+TV 方法的消耗时间是在 GPSR 方法消耗时间的基础上加上 3~4 秒。

表 3.6 不同方法的重建时间比较（单位：秒）

CPU 时间	GPSR	GPSR+TV	ADM
Phantom	72.6	76.4	7.7
Brain	68.9	71.3	24.8
Blocks	65.7	69.7	8.2

图 3.11 和图 3.12 分别为 GPSR 方法和 ADM 方法重建时信噪比随时间的变化。GPSR 重建方法的信噪比在整个重建过程中一直在增加，并在大约 45s 的阶段有一加速上升的趋势。事实上，在 45s 左右的时候正是主循环刚刚结束，去偏刚刚开始阶段。可以看到，去偏确实对图像的重建起到了积极作用。但也发现，不论从 SNR 上或是从时间效率上来看，GPSR 重建方法的效果都比 ADM 重建方法的效果差很多。ADM 方法使重建图像的信噪比在 8 秒之内就趋于平稳，而除了 Brain 图像，GPSR 方法不论在主循环阶段或是在去偏阶段，图像的信噪比都没有到达平稳状态。

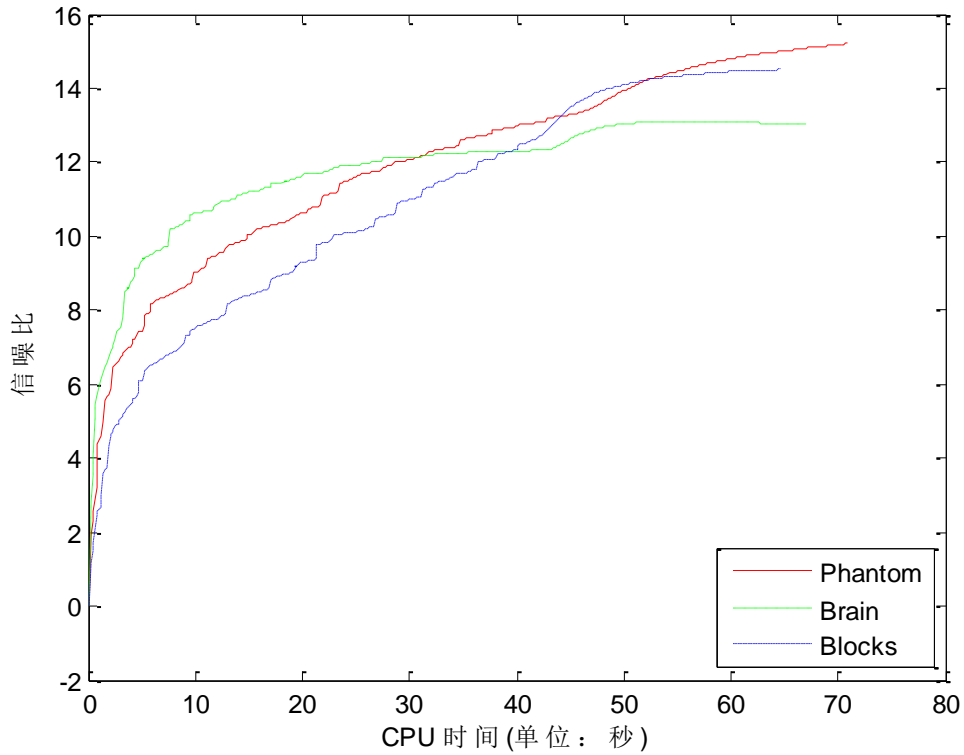


图 3.11 GPSR 方法信噪比随时间的变化

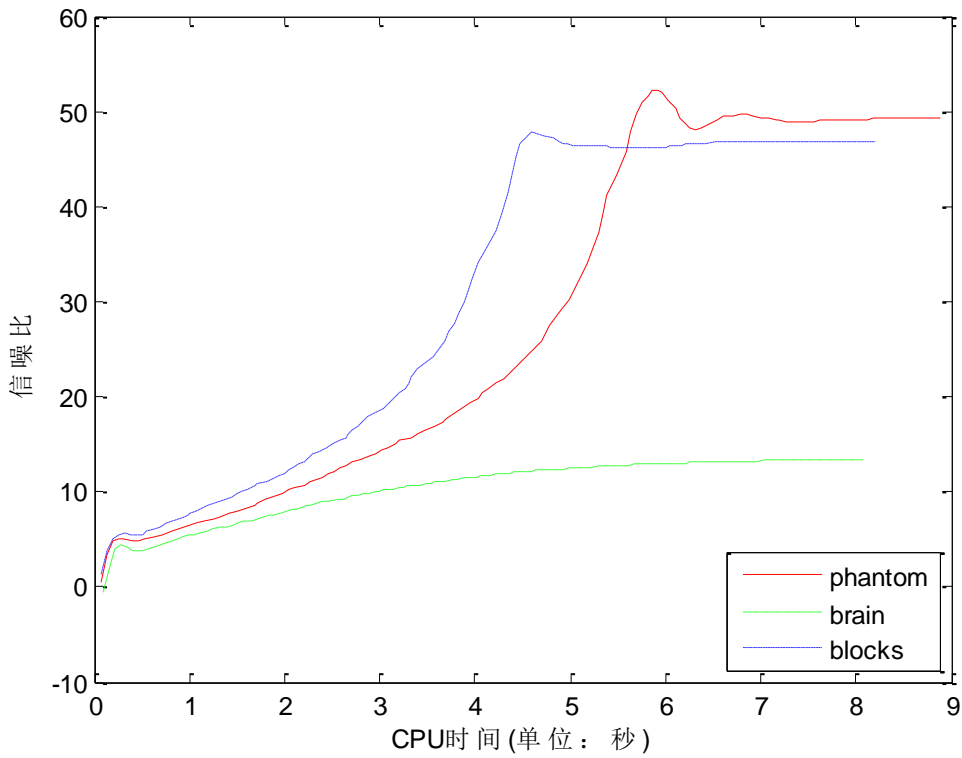


图 3.12 ADM 方法信噪比随时间的变化

3.4.3 多值模板与二值模板的比较

由第三章的分析可知，多值模板卷积要比二值模板卷积的重建质量更好。当迭代次数比较少时，在此，我们取主程序 200 次迭代，去偏 100 次迭代，二值模板与多值模板的结果如图 3.13 所示。



图 3.13 二值模板与多值模板的重建结果比较

其中，(b)的伪影明显，其 SNR 值为 10.154。而(c)图伪影大大降低，其 SNR 值为 14.167。由此可见，当迭代次数相同时，多值模板的卷积要好于二值模板的卷积。保持去偏次数不变，我们又用更多的主程序迭代次数来尝试，得到了如下的图表。

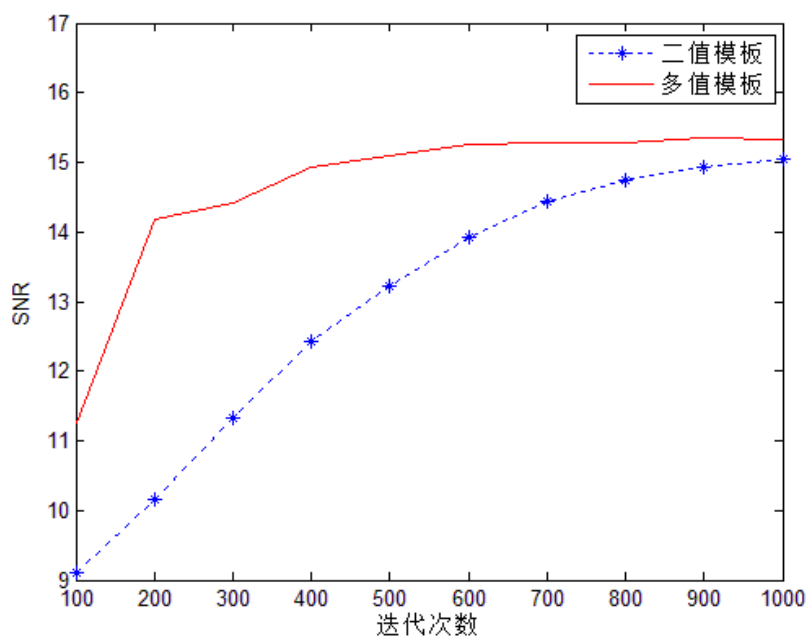


图 3.14 信噪比随迭代次数的变化

应用多值模板和二值模板重建结果的信噪比 SNR 最终都趋向平稳。但使用多值模板时，优化时的收敛速度明显快于二值模板的收敛速度，且其 SNR 值总是优于使用二值模板重建时的 SNR 值。

3.5 本章小结

本章首先介绍了单像素相机与高光谱压缩编码孔径成像系统，并描述了压缩成像的两类成像系统；接下来着重讨论了压缩编码孔径成像系统及其重建方法。为了消除重建方法中的伪影，尝试了两种方案，一是在重建之后使用 TV 去噪的方法去除图像中的伪影；二是将 TV 正则项加入到重建的优化式中，并使用 ADM 方法求解。实验表明，第二种思路的效果和效率都好于第一种思路。最后，通过实验验证了多值模板相对于二值模板的优越性。

第四章 压缩编码成像的扩展

傅里叶光学采用傅里叶分析和线性系统理论对光学问题进行研究，其研究的问题包括光的空间频率、光的成像等。利用傅里叶光学所介绍的 $4-f$ 系统，可以对压缩编码成像问题从频谱方面进行研究，将成像的空间卷积模型变换为频域的乘积模型，实现压缩编码成像的频域扩展。另外，通过对 $4-f$ 系统的改进，亦可实现压缩编码成像在时域上的扩展，获得更佳的成像效果。

4.1 傅里叶光学基础

处理光学问题，一般可以从两个方面着手。一方面是几何光学，通过光线追迹的方法来研究光学系统；另外一方面则是通过对光学衍射的研究来考察光学系统的性质。几何光学方法简单但不准确；物理光学方法准确但十分复杂。在信息论的推动下，傅里叶分析方法和线性系统理论的引入使古老的光学衍射分析变得更为简单。傅里叶光学将光的衍射简化为菲涅尔和夫琅禾费两种衍射模型，从光的空间频率的角度来研究光信息问题^{[58][59]}。

4.1.1 透镜的相位调制作用

这里引入透镜的复振幅透过率 $t_l(x, y)$ 来研究透镜对于入射波前的作用，其定义为：

$$t_l(x, y) = \frac{U_l'(x, y)}{U_l(x, y)} \quad (4-1)$$

如图 4.1 所示， $U_l(x, y)$ 和 $U_l'(x, y)$ 分别是透镜前平面和透镜后平面上的光场复振幅。

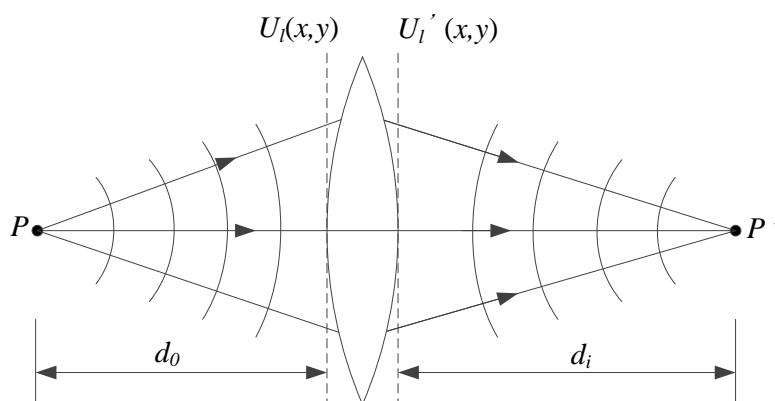


图 4.1 会聚透镜对点光源成像

图 4.1 表示出一个会聚透镜对点光源的成像。如果不考虑透镜有限孔径的衍射效应,也不考虑像差,一个位于光轴 P 点的单色点光源通过会聚透镜在光轴上 P' 点得到它的点像。从波面传播过程中发生的变化来看,透镜的作用是使一个发散球面波变换为会聚球面波。傍轴近似下,位于 P 点的单色光源发射出的发散球面波在紧靠透镜之前的平面上产生的复振幅分布可以表示为:

$$U_l(x, y) = A \exp(jkd_0) \exp\left[j \frac{k}{2d_0} (x^2 + y^2)\right] \quad (4-2)$$

式中,常数 A 表示傍轴近似下该平面上均匀的振幅分布, k 为波矢, d_0 表示点光源到透镜的距离。

考虑薄透镜的情况,并忽略透镜对于光波振幅的影响,傍轴近似下,向 P' 点会聚的单色球面波在紧靠透镜之后的平面上产生的复振幅分布可以表示为

$$U_l'(x, y) = A \exp(-jkd_i) \exp\left[-j \frac{k}{2d_i} (x^2 + y^2)\right] \quad (4-3)$$

式中, d_i 表示点光源的像到透镜的距离。

式(4-2)和式(4-3)中,相位因子 $\exp(jkd_0)$ 和 $\exp(-jkd_i)$ 仅表示常量位相变化,它们并不影响平面上位相的相对空间分布,分析时可以略去。把式(4-2)和式(4-3)代入式(4-1),则透镜的位相调制为

$$t_l(x, y) = \frac{U_l'(x, y)}{U_l(x, y)} = \exp\left[-j \frac{k}{2} (x^2 + y^2) \left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_0}\right)\right] \quad (4-4)$$

由于物、像距 d_0 和 d_i 满足成像的透镜定律

$$\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_0} = \frac{1}{f} \quad (4-5)$$

式中 f 为透镜的焦距。于是透镜的相位调制可以简单地表示为:

$$t_l(x, y) = \frac{U_l'(x, y)}{U_l(x, y)} = \exp\left[-j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2)\right] \quad (4-6)$$

显然,透镜能够对点物成像,即能把发散球面波变换为会聚球面波,正是由于它具有这一位相调制的能力。

4.1.2 透镜的傅立叶变换性质

透镜之所以能够用于作傅里叶变换,根本原因在于它具有能对入射波前施加位相调制的能力,或者说是透镜的二次位相因子在起作用。本小节将对最常用的单色平面波照明下的傅里叶变换光路作出讨论。观察平面都选在透镜的后焦面。而物体相对于会聚透镜,可位于三种不同位置:紧靠透镜放置、在透镜前方相距 d_0

处放置、在透镜后方相距后焦面 d 处放置。

下面将分别讨论上述的三种情况。

4.1.2.1 物体紧靠透镜放置

图 4.2 表示物体紧靠透镜放置的傅里叶变换光路。所谓物体是指透射型的薄的平面物体，例如记录有二维信息的透明片。采用振幅为 A 的单色平面波垂直照明。为了求出透镜后焦面上的光场分布 $U_f(x_f, y_f)$ ，沿光波传播方向逐一求出三个特定平面上的场分布：物体与透镜之间的平面上的复振幅分布 $U_l(x, y)$ 、紧靠透镜之后的平面上的复振幅分布 $U_l'(x, y)$ 以及后焦面上的复振幅分布 $U_f(x_f, y_f)$ 。

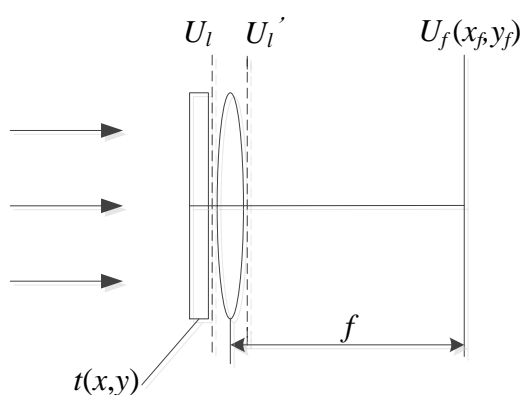


图 4.2 物体紧靠透镜的傅里叶变换光路

物体的复振幅透过率为 $t(x, y)$ ，所以

$$U_l(x, y) = At(x, y) \quad (4-7)$$

为了方便，先不考虑透镜的有限孔径，它的复振幅透过率可以表示为式(4-6)。于是有：

$$U_l'(x, y) = U_l(x, y) \cdot t_l(x, y) = At(x, y) \exp\left[-j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2)\right] \quad (4-8)$$

光波从透镜传播 f 距离，在后焦平面上有^[58]：

$$\begin{aligned} U_f(x_f, y_f) &= \frac{A}{j\lambda f} \exp\left[j \frac{k}{2f} (x_f^2 + y_f^2)\right] \cdot \mathfrak{F}\{t(x, y)\}_{f_x = \frac{x_f}{\lambda f}, f_y = \frac{y_f}{\lambda f}} \\ &= \frac{A}{j\lambda f} \exp\left[j \frac{k}{2f} (x_f^2 + y_f^2)\right] \cdot T\left(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f}\right) \end{aligned} \quad (4-9)$$

其中， $T(f_x, f_y) = \mathfrak{F}\{t(x, y)\}$ 。式(4-9)给出了一个重要结果，即透镜后焦面上的光场分布正比于物体的傅里叶变换。即后焦面上 (x_f, y_f) 点的振幅和位相正比与物体频谱所包含的频率分量 $(f_x = x_f/\lambda f, f_y = y_f/\lambda f)$ 的振幅和位相。

当然，这种傅里叶变换关系是不准确的。由于变换式前存在位相因子 $\exp[jk(x_f^2 + y_f^2)/2f]$ ，后焦面上的位相分布与物体频谱的位相分布并不相同。通常

记录和测量的是观察平面上的强度分布，这一位相对它并没有影响，所以

$$I_f(x_f, y_f) = \left(\frac{A}{\lambda f} \right)^2 \left| T \left(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f} \right) \right|^2 \quad (4-10)$$

显然，后焦面上的光强分布恰恰是物体的功率谱。

4.1.2.2 物体放置在透镜前方

图 4.3 表示物体放置在透镜前方的傅里叶变换光路。物体的复振幅透过率为 $t(x_0, y_0)$ ，它与透镜之间的距离为 d_0 。由于上一节已经推导出紧靠透镜之前的平面上场分布 $U_l(x, y)$ 与透镜后焦面上场分布 $U_f(x_f, y_f)$ 之间的关系，因而只需要沿光波传播方向逐一计算三个特定平面上的场分布：紧靠物体之后的平面上复振幅分布 $U_0(x_0, y_0)$ 、紧靠透镜之前的平面上的复振幅分布 $U_l(x, y)$ 和后焦面上的复振幅分布 $U_f(x_f, y_f)$ 。

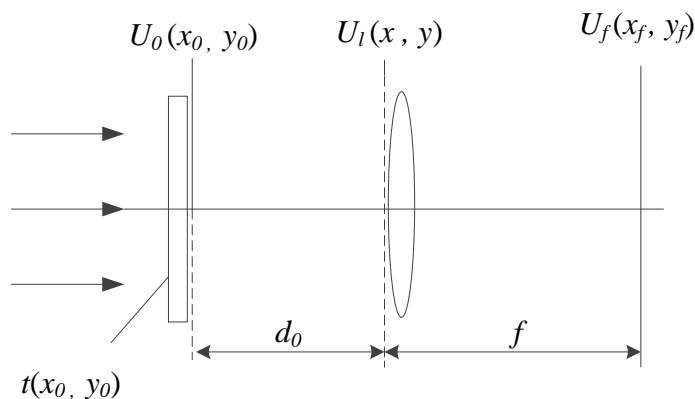


图 4.3 物体放置在透镜前方的傅里叶变换光路

用振幅为 A 的单色平面波垂直照明，物体的透射光场为

$$U_0(x_0, y_0) = A t(x_0, y_0) \quad (4-11)$$

通过计算可得：

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{A}{j\lambda f} \exp\left[j \frac{k}{2f} \left(1 - \frac{d_0}{f}\right) (x_f^2 + y_f^2)\right] \cdot T\left(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f}\right) \quad (4-12)$$

可见后焦面上的复振幅分布仍然正比于物体的傅里叶变换，由于变换式前的二次位相因子，使物体的频谱产生一个位相弯曲。当 $d_0 = 0$ ，物体紧靠透镜，公式给出的结果与式(4-9)完全一致。当物体位于透镜前焦面时， $d_0 = f$ ，上式变为

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{A}{j\lambda f} T\left(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f}\right) \quad (4-13)$$

显然，这一位相弯曲完全消失，后焦面上的光场分布是物体准确的傅里叶变换。当利用透镜对物体作傅里叶变换运算时，这正是我们通常所选用的光路。

4.1.2.3 物体放置在透镜后方

图 4.4 表示物体放置在透镜后方的傅里叶变换光路。物体的复振幅透过率仍为 $t(x_0, y_0)$ ，它离开后焦面的距离为 d 。仍然采用振幅为 A 的单色平面波照明。在这一光路中我们关心的是四个特定平面上的场分布：紧靠透镜之后的平面上的复振幅分布 $U_i'(x, y)$ 、紧靠物体的前后两个平面上的复振幅分布 $U_0(x_0, y_0)$ 和 $U_0'(x_0, y_0)$ 、后焦面上的复振幅分布 $U_f(x_f, y_f)$ 。可沿光波传播方向，逐面进行计算。

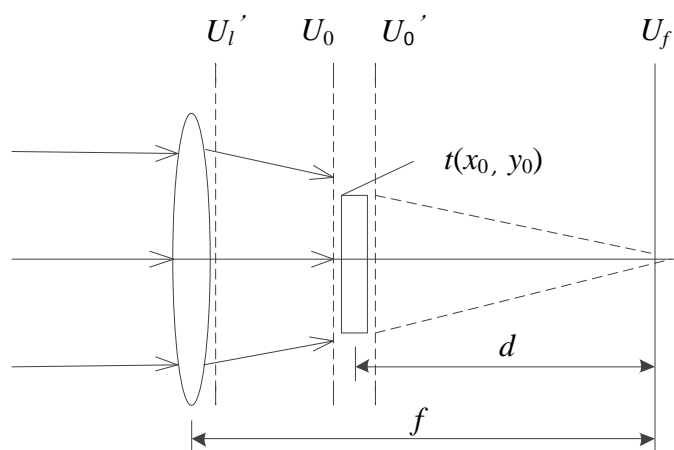


图 4.4 物体放置在透镜后方的傅里叶变换光路

通过计算，得到：

$$\begin{aligned}
 U_f(x_f, y_f) &= \frac{Af}{j\lambda d^2} \exp[j \frac{k}{2d} (x_f^2 + y_f^2)] \cdot \mathfrak{F}\{t(x_0, y_0)\}_{f_x=\frac{x_f}{\lambda d}, f_y=\frac{y_f}{\lambda d}} \\
 &= \frac{Af}{j\lambda d^2} \exp[j \frac{k}{2d} (x_f^2 + y_f^2)] \cdot T(\frac{x_f}{\lambda d}, \frac{y_f}{\lambda d})
 \end{aligned} \tag{4-14}$$

式中，

$$T(f_x, f_y) = \mathfrak{F}\{t(x_0, y_0)\} \tag{4-15}$$

公式表明当物体位于透镜后方时，除了相差一个二次位相因子，后焦面上得到的仍然是物体的傅里叶变换。当 $d = f$ 时，所得结果与公式(4-9)完全相同，说明物体无论紧靠透镜前放置还是紧靠透镜后放置，效果是一样的。

总结以上三种情况，单色平面波照明下，无论物体位于透镜前方、后方还是紧靠透镜，在透镜的后焦面上都可以得到物体的功率谱。对于这种照明方式，透镜后焦面常被称为傅里叶变换平面或（空间）频谱面。然而，当且仅当物体放置在透镜前焦平面上时，透镜的后焦平面才出现准确的物体频谱。利用这一特性，下面将介绍 $4-f$ 成像系统。

4.2 压缩编码成像的频域扩展

图 4.5 为光学 4- f 成像示意图。将物体置于 L_1 透镜的前焦平面, 即 $x_i O y_i$ 平面上, 并对其进行单色光照明。根据 4.1.2 小节的论述可知, 在 L_1 透镜的后焦平面、 L_2 透镜的前焦平面, 即 $f_x O' f_y$ 平面上, 获得的是物的频谱像。而当频谱面的像经过 L_2 透镜的后焦面时, 成的像为频谱面的频谱像。

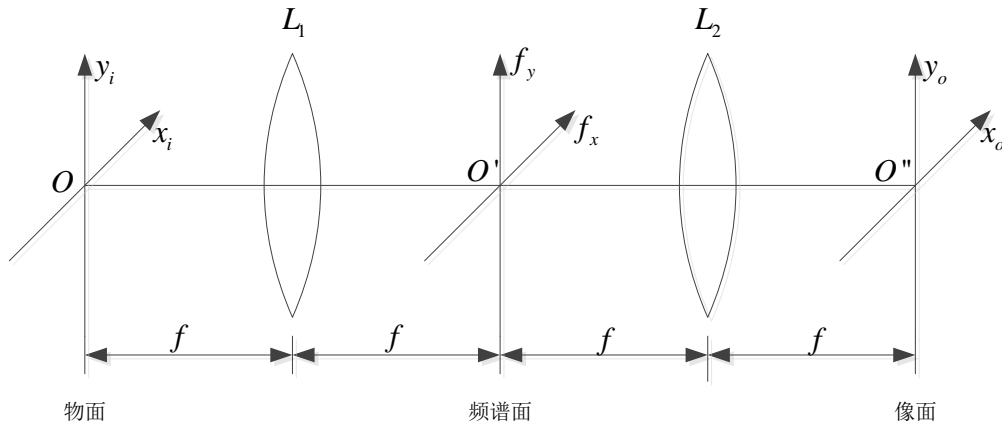


图 4.5 光学 4- f 系统示意图

根据傅里叶变换的性质, $x_o O'' y_o$ 平面的像是物的频谱的频谱, 实际为物的倒像。可用公式表示为:

$$U_o(x_o, y_o) = \mathfrak{F}\{U_f(f_x, f_y)\} = \mathfrak{F}\{\mathfrak{F}\{U_i(x_i, y_i)\}\} = U_i(-x_i, -y_i) \quad (4-16)$$

其中, U_i, U_f, U_o 分别表示 $x_i O y_i$ 、 $f_x O' f_y$ 及 $x_o O'' y_o$ 平面的复振幅。

若不考虑图像的倒置问题, 在数值上, 可以将 4- f 系统的成像过程描述为:

$$\mathbf{Y} = \mathcal{D}\left(\mathfrak{F}^{-1}\left(\mathfrak{F}\left(\mathbf{X}^{true}\right)\right)\right) \quad (4-17)$$

或其向量形式:

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}^{true} \quad (4-18)$$

在这里, 由于傅里叶变换和傅里叶逆变换互为逆运算, 因此, 这里的 \mathbf{Y} 实际为 \mathbf{X}^{true} 的降采样形式。这里的降采样指 CCD 的降采样。从上式可以看出, 若在 $f_x O' f_y$ 平面对物的频谱进行调制, 则可以实现压缩编码成像。下面从振幅和相位两个方面来讨论 4- f 系统的压缩编码成像方法。

4.2.1 4- f 系统压缩振幅调制方法

在图 4.5 中, 若在频谱面加入 0/1 二值编码孔径模板, 则相当于在频谱面上进行振幅调制。数学表达式可写为:

$$\mathbf{Y} = \mathcal{D}\left(\mathfrak{F}^{-1}\left(\mathbf{P} \circ \mathfrak{F}\left(\mathbf{X}^{true}\right)\right)\right) \quad (4-19)$$

或其向量形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{D}\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{p} \circ (\mathbf{F}\mathbf{x}^{true})) \\ &= \mathbf{D}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{F}\mathbf{x}^{true} = \mathbf{R}\mathbf{x}^{true} \end{aligned} \quad (4-20)$$

其中, \circ 表示对应元素相乘, \mathbf{P} 为 0/1 二值编码孔径模板, 0 表示不通过, 1 表示通过。可以通过数字微镜元件(DMD)来实现。 \mathbf{p} 为 \mathbf{P} 的向量形式, $\boldsymbol{\Sigma}$ 为对角矩阵, 其对角线上的元素 $\boldsymbol{\Sigma}(i,i) = \mathbf{p}(i)$, $\mathbf{R} = \mathbf{D}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{F}$ 。根据 2.2.2 小节可以看出, 式(4-20)中的 $\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{F}$ 为 BCCB 矩阵。因此, 该模型与 3.2.2 节的压缩编码孔径成像模型完全相符。利用 3.3 小节所描述的重建方法, 即可重建出高分辨率图像 $\hat{\mathbf{X}}$ 。其光学结构图如图 4.6 所示:

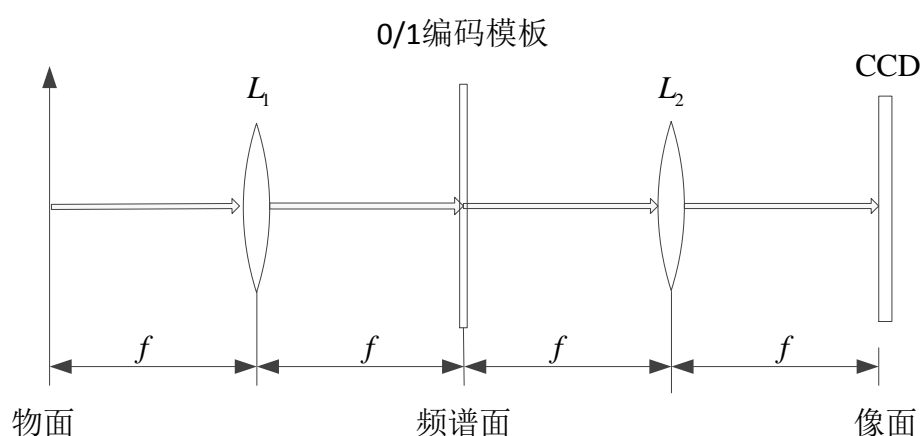
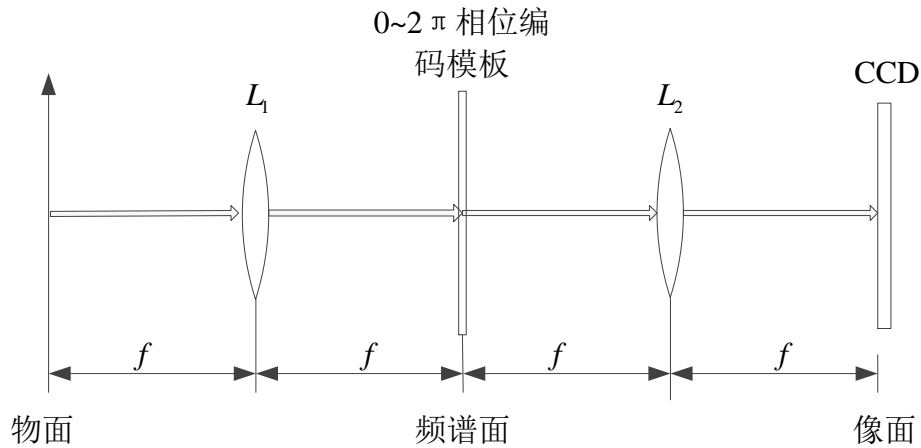


图 4.6 4- f 系统振幅压缩调制

4.2.2 4- f 系统相位压缩调制方法

事实上, 图像的压缩采样模型可以看作原图像信号与可控随机信号卷积的测量值。利用 SLM, 可以构造出幅值为 1 的随机相位模板。

设随机相位模板 $\mathbf{P} = \exp[j\varphi(f_x, f_y)]$, 其中 $\varphi(f_x, f_y) \in [0, 2\pi]$ 符合 $[0, 2\pi]$ 间的均匀分布, 并使得相位模板 \mathbf{P} 具有共轭对称性。这是因为, 若其具有共轭对称性, 则得到的观测为实值, 否则含有虚值。与 4.2.1 节相同, 该相位压缩调制可以利用 3.3 节的方法进行处理。其流程图如下图所示:

图 4.7 4- f 系统相位压缩调制

4.2.3 仿真实验与分析

在参数设置完全相同的前提下，对 Phantom 图像和 Cameraman 图像分别使用振幅调制方法与相位调制方法进行仿真。仿真方法为 3.3.3 小节所介绍的 ADM 方法。仿真结果如图 4.8 所示。

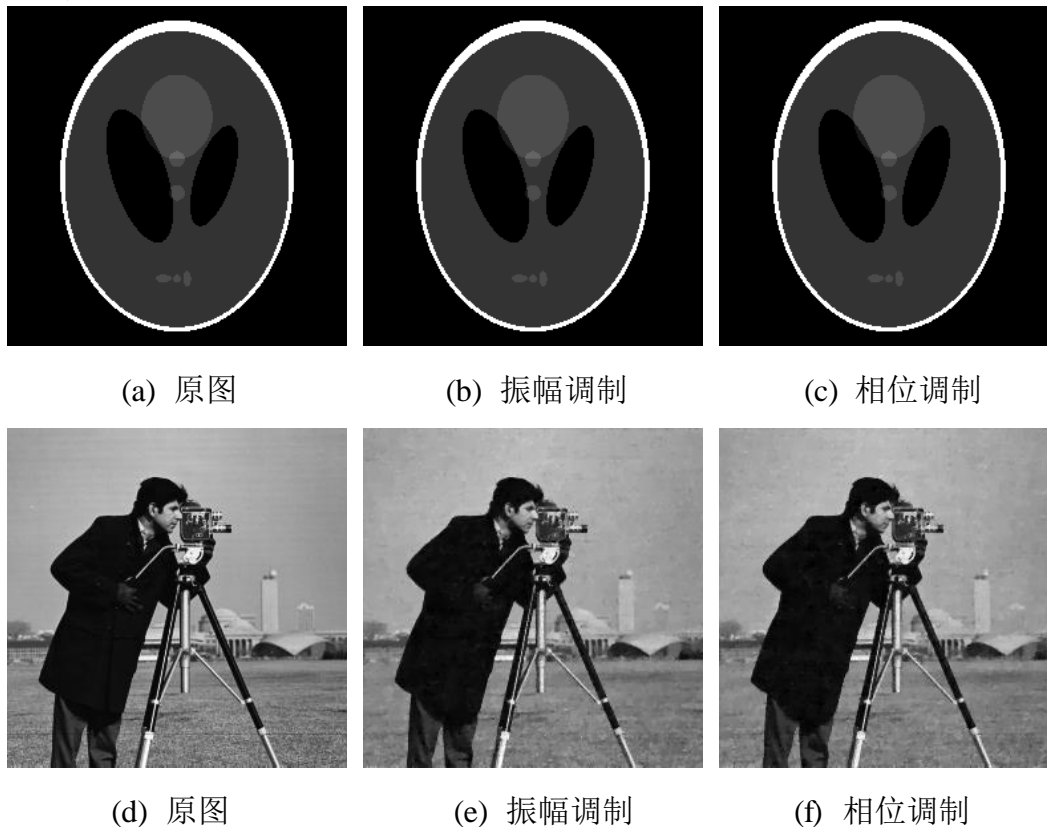


图 4.8 振幅调制与相位调制重建效果比较

在图 4.8 中，(b)图与(c)图的信噪比都为 49.3，而(e)图与(f)图的信噪比分别为 17.6 和 17.5，不论从图像本身或是信噪比来看，利用振幅调制方法和相位调制方

法，重建结果的差异并不大。

4.3 压缩编码成像的时域扩展

在压缩感知的启发下，目前的压缩成像架构主要有两种，一种是单像素相机成像，另一种是压缩编码孔径成像。从时空的角度来看，单像素相机在时间上随机采样；而压缩编码孔径在空间上随机采样。单像素相机采样持续时间较长，影响了成像的实时性；压缩编码孔径可以实现实时成像，但其 CCD 像元的压缩数有限，并引入了一些人工痕迹。因此，本节将时间与空间相结合，在极短的时间内利用压缩编码孔径成像若干次，以进一步改善压缩编码孔径框架下的成像效果。

4.3.1 改进的压缩编码 4- f 系统实现

压缩感知理论证明，若要获得更好的重建结果，降采样时应做到随机降采样。这里，利用第四章所述的 4- f 系统，并利用随机卷积理论^{[60][61]}，对第四章所提的压缩编码框架做出改进。

为了方便叙述，将式(4-19)和式(4-20)再次列出如下：

$$\mathbf{Y} = \mathcal{D}\left(\mathfrak{S}^{-1}\left(\mathbf{P} \circ \mathfrak{S}\left(\mathbf{X}^{true}\right)\right)\right) \quad (4-21)$$

其向量形式为：

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{D}\mathbf{F}^{-1}\left(\mathbf{p} \circ \left(\mathbf{F}\mathbf{x}^{true}\right)\right) \\ &= \mathbf{D}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{F}\mathbf{x}^{true} = \mathbf{D}\mathbf{A}^{CCA}\mathbf{x}^{true} \end{aligned} \quad (4-22)$$

注意到算子 $\mathcal{D}(\cdot)$ 为积分下采样算子。将该算子对应的矩阵 $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 写为行向量的形式，即

$$\mathbf{D} = \left[\mathbf{d}_1^T \quad \mathbf{d}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{d}_m^T \right]^T$$

其中 $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $i=1, 2, \dots, m$ 为矩阵 \mathbf{D} 的行向量。设 $r_{nm} = n/m$ ，在压缩编码的应用中， $r_{nm} > 1$ 为一个整数。通过简单的推理可以得知， \mathbf{d}_i 中有 r_{nm} 个值为 $1/r_{nm}$ ，而其余的 $n - r_{nm}$ 个值均为 0。因此，行向量 \mathbf{d}_i 的物理意义可以认为是从矩阵 \mathbf{A}^{CCA} 中挑出 r_{nm} 行，并对该 r_{nm} 作平均。而压缩感知理论表明，更好的降采样矩阵应该是从 \mathbf{A}^{CCA} 中随机挑取 m 行。因而对压缩编码 4- f 系统进行改进，其光学结构图 4.9 所示。

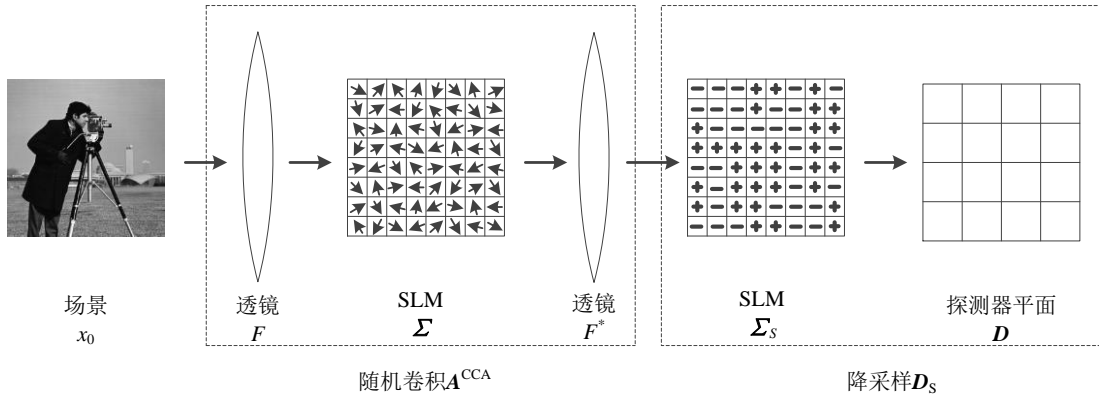


图 4.9 改进的压缩编码 4-f 系统光学结构

上图中，场景通过第一个 4-f 系统获得调制后的像，而第二个 SLM 的作用即是对所成的像进行筛选，使得一部分光通过而另一部分光不通过。在数学上可写为矩阵形式：

$$Y = \mathcal{D} \left(S \circ \left(\mathfrak{F}^{-1} \left(P \circ \mathfrak{F} \left(X^{true} \right) \right) \right) \right) \quad (4-23)$$

或其向量形式：

$$y = D \Sigma_s F^{-1} \Sigma F x^{true} = D_s A^{CCA} x^{true} \quad (4-24)$$

其中， $D_s = D \Sigma_s$ ，由于探测器前的 SLM 是可以控制的，因此完全可以使得 D_s 满足压缩感知的要求，即每行只包含一个 1 和 $n-1$ 个 0。这样，即可实现对 A^{CCA} 关于行的随机挑选。其重建结果要好于 4.2 节的结果。

将经典的 Cameraman 图像、Lena 图像和 3.4 节的 Brain 图像进行仿真实验，分别用积分降采样方法和随机降采样方法对这些图像进行采样，并对其进行重建，重建后图像的 SNR 值如表 4.1 所示：

表 4.1 不同降采样方式重建效果比较

SNR	Cameraman	Lena	Brain
积分降采样	15.3	13.8	12.6
随机降采样	17.3	16.2	13.2

从表中可以看出，随机降采样的重建结果要好于积分降采样的重建结果。

4.3.2 多次曝光的压缩编码成像

单像素相机仅使用单像元在一段时间上连续采样，占据空间优势，但实时性不够；而压缩编码结构仅采样一次，其使用的 CCD 的分辨率高于单像素但低于传统采样时所需的 CCD 分辨率，占据时间优势，即使如此，其所需 CCD 分辨率仍然较大。分时压缩编码结构使用比压缩编码结构分辨率更小的 CCD 在极短时间内多次成像，其时间足够短，可认为多次成像时场景不变，并且在每次成像时变换

编码孔径模板，这样即可得到多次相同场景的不同观测值。将这多次不同观测值合成为一个单一观测值，并用其进行解码超分辨率重建。

为了利用图 4.9 所描述的光学成像方式进行压缩测量，我们可以使用较大的 CCD（例如 $m = n/4$ ）进行测量，也可以利用更小的 CCD 进行多次测量。在每次的测量中仅仅改变置于 CCD 前的 SLM 的编码方式，即选择矩阵 \mathbf{A}^{CCA} 的不同行进行观测。用数学式表达为：

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)} &= \mathbf{D}_s^{(1)} \mathbf{A}^{CCA} \mathbf{x}^{true} \\ \mathbf{y}^{(2)} &= \mathbf{D}_s^{(2)} \mathbf{A}^{CCA} \mathbf{x}^{true} \\ &\dots \\ \mathbf{y}^{(l)} &= \mathbf{D}_s^{(l)} \mathbf{A}^{CCA} \mathbf{x}^{true} \end{aligned} \quad (4-25)$$

上式一共进行了 l 次连续观测。当拍摄的是静态图像或曝光时间很短而使得 \mathbf{x}^{true} 可认为不变时，这 l 次观测值可以被很方便地联合求解。

$$\mathbf{y}_M = \mathbf{D}_M \mathbf{A}^{CCA} \mathbf{x}^{true} \quad (4-26)$$

其中，

$$\mathbf{y}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{(1)} \\ \mathbf{y}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(l)} \end{bmatrix}, \mathbf{D}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_s^{(1)} \\ \mathbf{D}_s^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{D}_s^{(l)} \end{bmatrix} \quad (4-27)$$

此时，即可利用 3.3 节所述的方法进行重建。

其整体的流程可用表示为图 4.10。

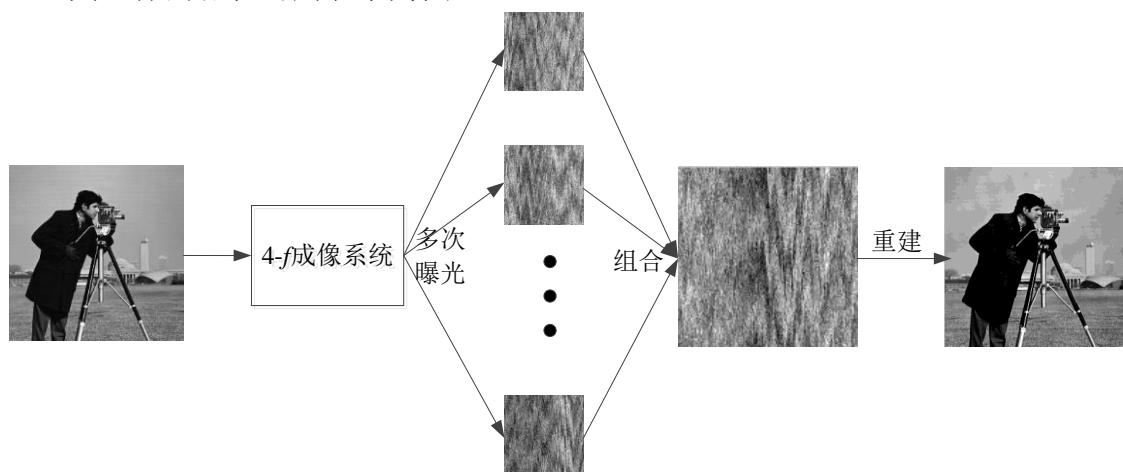


图 4.10 多次曝光的压缩编码孔径成像流程图

小分辨率的图像可以为任意分辨率大小，重建出的图像分辨率仅与两个 SLM 的分辨率有关。其重建方法直接利用 3.3 节所描述的 ADM 重建方法即可。

4.3.3 仿真实验与分析

为了重建分辨率为 256×256 的图像，可以选用分辨率为 128×128 的图像，也可以选用更小分辨率的图像，如 64×64 、 32×32 等。这里选取具有代表性的 64×64 分辨率的 CCD 来采集图像，分别采集 1 次、2 次、4 次、8 次、16 次并重建图像，如图 4.11 所示。



图 4.11 多次曝光仿真实验

图 4.11 中，(b)图 SNR 为 10.3，(c)图 SNR 为 13.3，(d)图 SNR 为 17.3，(e)图 SNR 为 24.0，(f)图 SNR 为 41.8。可见多次曝光采样可以大大提高图像的质量。

4.4 本章小结

本章首先介绍了傅里叶光学基础，着重描述了 $4-f$ 系统相关的知识，说明利用 $4-f$ 系统可以实现随机卷积。利用该 $4-f$ 系统，首先实现了压缩编码成像的频域扩展。文中采用了两种调制方法，即振幅调制方法与相位调制方法来实现编码模板。仿真实验表明，这两种方式都能获得较好的重建效果，不论从视觉上或是信噪比上来看，其重建图像的质量都相差不大。之后对 $4-f$ 系统架构进行改进，并将改进后的系统架构应用于多次曝光的压缩编码成像上，通过仿真实验可以看出，采样次数越多，图像质量越高。

第五章 总结与展望

压缩成像是光学成像与压缩感知理论结合而产生的新领域。它证明了在成像的采样过程中可以利用远小于奈奎斯特采样频率的采样率对原始场景进行采样,然后通过后期重建使压缩编码后的图像恢复为高分辨率的图像。

本文首先介绍了信号采样的数学理论基础——压缩感知理论,然后在该理论的基础之上,结合光学成像知识,介绍了压缩编码孔径成像技术;在重建过程中加入了全变分范数,使得重建结果的伪影大大降低。另一方面,提出了压缩编码孔径在频域和时间域上的扩展。所谓的频域扩展是指结合傅里叶光学的知识,利用 $4-f$ 光学架构上实现随机卷积,提出了振幅的调制和相位的调制两种方法;而时间域的扩展是指通过多次曝光的方法,利用更小分辨率的 CCD 来实现压缩编码孔径成像。

本文的主要内容和具体工作归纳如下:

(1) 介绍了压缩感知理论,说明了用更少采样获取高清图像的可能性;在压缩感知理论框架的指导下,构建起光学的二维卷积成像模型与压缩感知的一维矩阵-向量乘积模型之间的数学关系;并根据该数学关系,将块循环循环块(BCCB)矩阵应用于压缩编码模板的设计中,并应用快速傅立叶变换,大大降低了算法的空间复杂度与时间复杂度。

(2) 介绍了压缩编码孔径成像时的复原重建算法,并结合重建后伪影多的特点,提出了后期 TV 去噪和在重建优化式中加入 TV 正则项两种方法,实验证明,后者比前者的效果要好。

(3) 结合傅里叶光学的相关内容,介绍了压缩编码孔径 $4-f$ 成像系统,并阐述了振幅调制与相位调制两种调制方式。仿真实验表明,这两种方法都能取得较好的重建效果。

(4) 对压缩编码孔径 $4-f$ 成像系统架构进行改进,获得更好的重建结果,并在此基础上提出了多次曝光的压缩编码孔径成像方法,使得人们可以使用更小分辨率的 CCD 对静态图像或低速动态图像进行成像。

由于作者的水平和时间的限制,光学压缩编码的成像技术还有很多可以继续完善的工作:

(1) 目前所做工作只停留在仿真阶段,实验性的工作做的太少。可以预料,实验中遇到的问题会比理论中的问题更多,更困难。因此,真正完成光路的搭建、成像、重建会是下一步的重要工作。

(2) 压缩编码孔径 $4-f$ 成像系统目前的设计只考虑了单色光的情况。如何将

其推广到非单色光，从而能应用到更广范围的成像应用中亦是亟待解决的问题。

(3) 在重建过程中，还有一些尚未解决的问题。例如，对于有些图像如 **Phantom**、**Blocks**，其重建效果就十分好，而对于 **Brain** 这样的图像，其重建效果就不如 **Phantom**、**Blocks** 的重建效果好，其原因还有待考究。这可能与稀疏化图像的正交矩阵有关。如何使得每一幅图像都能获得最佳的重建效果亦是将来需要解决的问题之一。

(4) $4-f$ 成像系统的架构过为复杂，若能将这种压缩编码成像的方式应用于普通相机，则其应用范围将更为广泛。

致 谢

在撰写硕士论文的过程中，我得到了很多人的帮助和支持。本论文能够顺利地完成与他们的付出是分不开的。在此向他们表示最衷心的感谢。

首先向我的导师邵晓鹏教授表示由衷的感谢。两年半的时间，他教给我的不仅是知识，更重要的是治学的态度和严谨的作风。他鼓励我们要将理论与实际相结合，多做实验多做分析；当我们想使用投机取巧的方法来搞科研时，他提醒我们科研的品质比科研的成果更重要。我在导师的鼓励与善意的批评中明白了非宁静无以致远、非淡泊无以明志的道理。

另外，要感谢 WuSheng Lu、Roummel Marcia、WoTao Yin、HaoMin Zhou、李庆辉老师、王晓蕊老师对我工作的帮助与支持。这六位老师在数学、光学方面都有着极高的造诣，在最关键的问题上给了我莫大的帮助。他们谦虚与乐于分享的精神更值得我学习。

感谢我的父母，在外求学的六年，我给你们添了不少麻烦。谢谢你们总是那么地信任我，支持我。没有你们的关怀，我不可能静下心来关注学业。

感谢徐大雍师兄、侯谨妍师姐，引领我进入内心的世界。

感谢许晓峰师兄、陈少冲师姐及庾吉飞引领我踏入计算成像领域的大门。

感谢我的女朋友饶存存，在诸多方面给与我的启迪。

感谢龚昌妹师姐，以及黄远辉、许宏涛、王杨、王阳、吕斐等给予我生活学习上的帮助和关怀。同时感谢靳振华、刘飞、乔琳、吴腾飞、杜娟、杨虹、张少辉、韩平丽等师弟师妹给实验室创造了一个轻松、良好的学习工作氛围，使我感受到了大家庭般的温暖。

最后，再次向所有关心和帮助过我的老师、亲人、朋友、同学表示最真诚的感谢！

参考文献

- [1] R. F. Marcia, Z. T. Harmany, and R. M. Willett, Compressive Coded Aperture Imaging[C]. Proc. SPIE 7246, Computational Imaging VII, 72460G (February 02, 2009).
- [2] 邵晓鹏,钟宓,杜娟,饶存存. 多值压缩编码孔径超分辨率成像方法[J]. 光电子.激光, 2012, 06(23): 1189-1195.
- [3] 钟宓. 基于压缩感知理论的图像超分辨率重建算法研究[D]. 西安电子科技大学, 2010.
- [4] J. Yang, J. Wright, T. S. Huang, et al. Image Super-Resolution via Sparse Representation[J]. IEEE Trans. on Image Processing, 2010, 19(11): 2861-2873.
- [5] D.L. Donoho. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory. 2006, 52(4): 1289-1306
- [6] E. J. Candés, J. Romberg and T. Tao. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Trans. on Information Theory. 2006, 52(2): 489-509
- [7] E. J. Candés. Compressive sampling[C]. In: Proceedings of International Congress of Mathematicians. Zürich, Switzerland: European Mathematical Society Publishing House. 2006: 1433-1452
- [8] M. F. Duarte, M. A. Davenport, D. Takhar, et al. Single pixel imaging via compressive sampling[C]. IEEE Sig.Proc.Mag, 2008,25(2): 83-91.
- [9] R.Marcia and R.Willett. Compressive coded aperture superresolution image reconstruction[C]. Proc. Of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. 2008: 833-836.
- [10] R. F. Marcia, Z. T. Harmany, R. M. Willett. Compressive Coded Apertures for High-Resolution Imaging[C]. Proc. SPIE.Optics, Photonics, and Digital Technologies for Multimedia Applications. Belgium, 2010, 772304 doi:10.1117/12.849487.
- [11] D. J. Brady and M. E. Gehm. Compressive imaging spectrometers using coded apertures[C], Proc. SPIE. 2006. 6246, 62460A.
- [12] H. Arguello and G. Arce. Coded Aperture Design For Compressive Spectral

- Imaging. EUSIPCO.2010, 18:1434-1438.
- [13] E. Candés and J. Romberg. Sparsity and incoherence in compressive sampling[J], Inverse Problems. 2007, 23(3): 969-985.
- [14] E. Candés E and B. Wakin. An introduction to compressive sampling[J], Inverse Problems Magazine. 2008, 25(2): 21-30.
- [15] E. Candés and T. Tao. Decoding by linear programming[J]. IEEE Trans. Info. Theory. 2005, 51(12): 4203-4215.
- [16] E. Candés, G Romberg and T. Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. Comm. Pure Appl. Math. 2006, 59(8): 1207-1223.
- [17] Joseph W. Goodman, Introduction to Fourier Optics[M]. 2nd Edition. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc, 2005.
- [18] P. C. Hansen, J. G Nagy and D. P. O'Leary. Deblurring Images:Matrices, Spectra, and Filtering[M]. SIAM. 2006.
- [19] S. Kim, K. Koh, M. Lustig, et al. An interior-point method for large-scale l_1 regularized least squares[J]. IEEE Journal on Selected Topics in Signal Processing. 2007, 1(4):606-617.
- [20] D. L. Donoho, Y. Tsaig. Fast solution of l_1 -norm minimization problems when the solution may be sparse[J]. IEEE Trans. on information theory. 2008, 54(11): 4789-4812.
- [21] M. A. T. Figueiredo, R. D. Nowak, S. J. Wright. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing. 2007, 1(4): 586-598.
- [22] S. Mallat, Z. Zhang. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Trans. on Signal Processing. 1993, 41(12): 3397-3415.
- [23] N. G Kingsbury. Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals[J]. Journal of Applied and Computational Harmonic Analysis. 2001, 10(3): 234-253.
- [24] I. Daubechies, M. Defrise, and C. D. Mol. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint[J]. Comm. Pure Appl. Math. 2004, 57(11): 1413-1457.
- [25] P. L. Combettes and V. R. Wajs. Signal recovery by proximal forward-backward splitting[J]. Multiscale Model. Simul. 2008, 4(4):1168-1200.
- [26] A. Beck and M. Teboulle, A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems[J]. SIAM J. Imaging Sciences. 2009, 2(1): 183-202.

- [27] Y. Nesterov, A method for solving the convex programming problem with convergence rate $O(1/k^2)$ [J]. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1983. vol. 269: 543-547.
- [28] Y. Nesterov, Introductory Lectures on Convex Optimization – A Basic Course[M]. Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [29] M. E. Gehm, R. John, D. J. Brady, et al. Single-shot compressive spectral imaging with a dual-disperser architecture[J]. Opt. Express. 2007, 15(21): 14013-14027.
- [30] A. Wagadarikar, R. John, R. Willett, et al. Single disperser design for coded aperture snapshot spectral imaging[J]. Appl. Opt. 2008, 47(10): B44-B51.
- [31] A. A. Wagadarikar, N. P. Pitsianis, X. Sun and D. J. Brady. Spectral image estimation for coded aperture snapshot spectral imagers[C]. Proc. SPIE 7076, Image Reconstruction from Incomplete Data V, 707602, 2008.
- [32] A. Levin, R. Fergus, F. Durand, et al. Image and depth from a conventional camera with a coded aperture[C]. Proc. Of Intl. Conf. Comp. Graphics. and Inter. Tech, 2007.
- [33] W. Bajwa, J. Haupt, G. Raz, et al. Toeplitz-structured compressed sensing matrices[C]. Processing of IEEE SP 14th Workshop on Statistical Signal. 2007: 294-298.
- [34] Z. Harmany, D. Thompson, R. Willett, et al. Gradient Projection for Linearly Constrained Convex Optimization in Sparse Signal Recovery[C]. IEEE International Conference on Image Processing. 2010, 3361-3364.
- [35] J. J. Fuchs. Multipath time-delay detection and estimation[J]. IEEE Trans. on Signal Processing. 1999, 47(1): 237-243.
- [36] J. Barzilai and J. Borwein. Two point step size gradient methods[J]. IMA Journal of Numerical Analysis. 1988, vol. 8: 141-148.
- [37] Y. H. Dai and R. Fletcher. Projected Barzilai-Borwein methods for large-scale box-constrained quadratic programming[J]. Numerische Mathematik, 2005, vol. 100: 21-47.
- [38] T. Serafini, G. Zanghirati, L. Zanni. Gradient projection methods for large quadratic programs and applications in training support vector machines[J]. Optimization Methods and Software. 2004, 20(2-3): 353-378
- [39] D. P. Bertsekas. Nonlinear Programming[M], 2nd ed., Athena Scientific, Boston, 1999.
- [40] A. N. Iusem. On the convergence properties of the projected of the projected gradient method for convex optimization[J]. Computational and Applied

- mathematics, 2003, 22(1): 37-52.
- [41] E. G. Birgin, J. M. Martinez, and M. Raydan. Nonmonotone spectral projected gradient methods on convex sets[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2000, vol. 10: 1196-1211.
- [42] R. W. Cottle, J.-S. Pang, and R. E. Stone. *The Linear Complementarity Problem*[M], Academic Press, 1993.
- [43] S. Kim, K. Koh, M. Lustig, S. Boyd, and D. Gorinvesky. A method for large-scale l_1 -regularized least squares problems with applications in signal processing and statistics. Tech. Report, Dept. of Electrical Engineering, Stanford University, 2007. Available at www.stanford.edu/~boyd/l1_ls.html
- [44] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*[M], 2nd ed., Springer Verlag, New York, 2006.
- [45] B. Moghaddam, Y. Weiss, and S. Avidan. Spectral bounds for sparse PCA: exact and greedy algorithms[C]. *Advances in Neural Information Processing*, MIT Press, 2006, vol 18 : 915-922.
- [46] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*[M]. Academic Press, San Diego, CA, 1998.
- [47] M. Figueiredo and R. Nowak. An EM algorithm for wavelet-based image restoration[J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2003, 12(8): 906-916.
- [48] L. Rudin, S. Osher and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica D*, 1992, vol 60: 259-268.
- [49] A. Beck and M. Teboulle. Fast gradient-based algorithms for constrained total variation denoising and deblurring problems[J]. *IEEE Trans. Image Processing*, 2009, 18(11): 2419-2434.
- [50] A. Chanmbolle. An algorithm for total variation minimization and applications[J]. *J. Math. Imag. Vis.*, 2004, 20(1): 89-97.
- [51] Y. Wang, J. Yang, W. Yin, et al. A new alternating minimization algorithm for total variation image reconstruction[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2008, 1(3): 248-272.
- [52] M. R. Hestenes. Multiplier and gradient methods[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 1969, 4(5): 303-320.
- [53] M. J. D. Powell. A method for nonlinear constraints in minimization problems[M]. in [Optimization], Fletcher, R., ed., 283-298, Academic Press, New York(1972).
- [54] R. Glowinski, and A. Marrocco. Sur l'approximation par elements finis d'ordre

- un, et la resolution par penalization-dualite dune classe de problemes de Dirichlet nonlineaires[J]. Rev. Francaise dAut. Inf. Rech. Oper. 1975, 2: 41-76.
- [55] D. Gabay, and B. Mercier. A dual algorithm for solution of nonlinear variational problems via finite element approximations[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1976, 2(1), 17-40.
- [56] J. Yang and Y. Zhang. Alternating direction algorithms for ℓ_1 -problems in compressive sensing. Rice University CAAM Technical Report TR09-37, 2010.
- [57] M. Fortin and R. Glowinski. Augmented Lagrangian Methods : Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems[M]. Amsterdam New York, North-Holland Publ. Co. 1983.
- [58] 吕乃光. 傅里叶光学[M]. 第二版. 北京: 机械工业出版社. 2008. 120-136
- [59] D. G Voelz. Computational Fourier Optics[M], SPIE Press, 2011.
- [60] J. Romberg, Compressive sensing by random convolution[J], Journal SIAM Journal on Imaging Sciences archive. 2009, 2(4): 1098-1128.
- [61] Y. Wu and G. Arce. Snapshot Spectral Imaging via Compressive Random Convolution[C]. IEEE Inter. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing - ICASSP, 2011, 1465-1468.

研究成果

在硕士研究生期间取得的研究成果如下：

一、参加科研情况：

1. 压缩编码孔径成像
2. 酒品防伪标志手机识别系统
3. 遥感图像去条带方法研究

二、发表论文、申请专利情况：

1. 邵晓鹏,钟宓,杜娟,饶存存. 多值压缩编码孔径超分辨率成像方法[J]. 光电子.激光, 2012, 06(23): 1189-1195.
2. Xiaopeng Shao and Cheng Zhong. "Phase congruency assesses hyperspectral image quality", Proc. SPIE 8514, Satellite Data Compression, Communications, and Processing VIII, 851408 (October 19, 2012); doi:10.1117/12.929183.
3. 邵晓鹏, 钟宓, 王杨, 黄远辉. 一种简化 PCNN 模型在彩色图像边缘检测上的应用[J], 西安电子科技大学学报, 2012, 39(6): 1-9.
4. 钟宓, 杜娟, 黄远辉. 基于分时压缩编码的光学超分辨成像系统[C]. 西部光子学会议, 2011.
5. 邵晓鹏, 钟宓等. 基于压缩编码孔径的超分辨率成像系统及成像方法[P], 申请号: 201110329866.3. 专利号: 102438102. 2012.
6. 邵晓鹏, 徐大雍, 钟宓等. 基于光腔衰荡法的光学谐振腔损耗测量系统[P], 申请号: 201110093195.5. 专利号: 102252825. 2011.



西安电子科技大学

地址：西安市太白南路2号

邮编：710071

网址：www.xidian.edu.cn